Kleine Objekte in Kategorien von Algebren

Jan Jürjens
Diplomarbeit
Studiengang Mathematik
Universität Bremen

23.07.1998

Betreuer: Prof. Dr. H.-E. Porst
Zweiter Gutachter: Prof. Dr. H. Herrlich
Dritter Prüfer: Prof. Dr. J. Gamst

Inhaltsverzeichnis

0 Vorwort **5**

1 Präliminarien **11**
1.1 Allgemeine Präliminarien 11
1.2 Kategorielle Präliminarien 12
1.3 Präliminarien in Kategorien von Algebren 16

2 Lokal präsentierbare Kategorien **23**
2.1 λ-Orthogonalitätsklassen 23
2.2 Eigenschaften lokal präsentierbarer Kategorien 32

3 Kategorien von Algebren **35**
3.1 Fakten in Kategorien von Algebren 35

4 Kleine Objekte in Kategorien von Algebren **53**
4.1 Kleinheitsbedingungen I 53
4.2 Kleinheitsbedingungen II 66
4.2.1 In λ-Orthogonalitätsklassen und Quasivarietäten sind λ-kleine Objekte λ-präsentiert 81
4.2.2 Extremal λ-erzeugte Objekte in λ-direktiven reflektiven Unterkategorien eines λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ sind λ-kompakt . . . 91
4.3 Über ein Problem von Gabriel und Ulmer 97

A Übersicht **105**
A.1 Hierarchie der Unterkategorien 106
A.2 Kleinheitsbedingungen 107

B Wörterbuch **109**

C Abkürzungen der Kategorien **111**

D Literaturverzeichnis **113**
D.1 Zitierte Arbeiten 113
D.2 Sammelwerke 116
D.3 Weitere Literaturhinweise 117

E Zeichenverzeichnis **129**

Index **131**

Kapitel 0

Vorwort

In dieser Arbeit werden Kleinheitsbedingungen an Objekte in Kategorien von Algebren untersucht. Die Arbeit baut auf die Ergebnisse in [GU], [BH] und [AR] auf. Die hier gezeigten Ergebnisse sind m.E. neu, soweit nicht im einzelnen Quellen angegeben sind. Eine Veröffentlichung der Hauptergebnisse dieser Arbeit ist in Vorbereitung (siehe [J]).

Motivation

Historische Entwicklung

Das Konzept einer abstrakten Gruppe ist schon im Werk von Arthur Cayley (1821-1895) klar erkennbar, von etwa die Bemerkung stammt: "A group is defined by means of the laws of combinations of its symbols." Jedoch gewann es erst verbreitete Anwendung, als Walther von Dyck (1856-1934) Präsentationen von Gruppen einführte [Rob p.viii]:
Informell besteht eine Präsentation P einer Gruppe G aus erzeugenden Elementen $\{x_i : i \in I\}$ und erzeugenden Gleichungen $t_j = s_j$ $(j \in J)$ zwischen Elementen, die aus den x_i mithilfe der Gruppenoperationen (der Multiplikation $\circ$, der Inversenbildung $(_)^{-1}$ und des neutralen Elements e) gebildet werden ("Termen in x_i"). G besteht dann aus allen Termen in den x_i, und diese werden gemäß der gegebenen Gleichungen $t_j = s_j$ (und den sich daraus ergebenden Gleichungen) identifiert. Jede Gruppe besitzt eine solche Präsentation. Besondere Bedeutung kommt dabei den Gruppen zu, die eine Präsentation besitzen, in der die Indexmenge I endlich ist ("endlich erzeugte Gruppe"), oder in der die Menge I und J beide endlich sind ("endlich präsentierte Gruppe"): Sie sind relativ einfach zu untersuchen, und jede beliebige Gruppe läßt sich aus ihnen konstruieren (mithilfe "gerichteter Colimiten").

Um diese Beobachtungen auch in anderen mathematischen Zusammenhängen ausnutzen zu können, macht es Sinn, die Begriffe der endlichen Erzeugtheit und endlichen Präsentiertheit mithilfe der Kategorientheorie zu abstrahieren, um sie auf andere Situationen übertragen zu können. Die direkte kategorielle Umsetzung (sowie die Verallgemeinerung der in den Begriffen vorkommenden Endlichkeit auf Beschränktheit durch beliebige reguläre Kardinalzahlen λ) führt zur Definition der "λ-Erzeugtheit" bzw. "λ-Präsentiertheit" (siehe 4.6: (c) bzw. (b)). Weitere kategorielle Charakterisierungen der beiden Begriffe ermöglichen die Begriffe

- "λ-Erzeugbarkeit" bzw. "λ-Präsentierbarkeit (4.1: (3) bzw. (1)), die unabhängig voneinander in [GU] und [ArGrVer] eingeführt wurden (siehe [AR p66]),
- "λ-Kleinheit" (4.1: (2)), eine Abschwächung der λ-Präsentierbarkeit in [BH] und
- "λ-Kompaktheit" (4.6: (d)), eine Variation der λ-Erzeugtheit in [P98].

In dieser Arbeit soll nun untersucht werden, inwieweit Implikationen zwischen diesen (und anderen) Kleinheitsbedingungen, die etwa in der Kategorie der Gruppen gelten, in allgemeineren Situationen gültig sind:
Eine Gruppe läßt sich auffassen als eine Menge G mit Operationen darauf (der zweistelligen $\circ : G^2 \to G$, der einstelligen $(_)^{-1} : G \to G$ und der nullstelligen $e : G^0 \to G$, siehe oben), die bestimmten Gleichungen genügen:

- dem Assoziativgesetz $\forall x, y, z \in G : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$,
- dem Inversengesetz $\forall x \in G : x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$ und
- der Neutralität von e: $\forall x \in G : e \circ x = x \circ e = x$.

Als direkte Verallgemeinerung davon versteht man in der universellen Algebra unter einer finitären Varietät eine Klasse von Mengen A mit endlichstelligen Operationen, die bestimmte Gleichungen

$$\forall \vec{x} \in A^n, i \in I : t_i(\vec{x}) = s_i(\vec{x})$$

(für eine endliche Menge I und n-stellige Terme t_i, s_i) erfüllen (siehe 3.2 - der Vollständigkeit halber werden in dieser Arbeit allgemeiner die infinitären mehrsortigen Algebren betrachtet, dies macht jedoch keinen wesentlichen Unterschied). Läßt man anstelle der Gleichungen auch Implikationen der Form

$$\forall \vec{x} \in A^n : \Big((\forall i \in I : t_i(\vec{x}) = s_i(\vec{x})) \Rightarrow t(\vec{x}) = s(\vec{x}) \Big)$$

als definierende Formeln zu (für eine endliche Menge I und n-stellige Terme t_i, s_i, t, s), so erhält man das Konzept der finitären Quasivarietät. Eine weitere wichtige Verallgemeinerung ($\aleph_0$-Orthogonalitätsklasse) folgt durch Zulassung

von definierenden Formeln der Form

$$\forall \vec{x} \in A^n \Big((\forall i \in I : t_i(\vec{x}) = s_i(\vec{x})) \Rightarrow \exists! \vec{y} \in A^m : \forall j \in J : t'_j(\vec{x}, \vec{y}) = s'_j(\vec{x}, \vec{y}) \Big)$$

(für endliche Mengen I, J, n-stellige Terme t_i, s_i und $(n+m)$-stellige Terme t'_i, s'_i). In dieser Arbeit wird nun eine "Hierarchie" von Kategorien mit den genannten (und anderen Eigenschaften) auf gestellt (siehe 3.4). Für zwei Kleinheitsbedingungen x und y wird dann jeweils die relativ zu dieser Hierarchie schwächste Voraussetzung an eine Kategorie $\mathbf{A}$ angegeben, sodaß ein Objekt A in $\mathbf{A}$, daß x erfüllt, auch y erfüllt (siehe 4.4 und 4.8). Hauptresultate sind:

- In λ-Orthogonalitätsklassen von Kategorien der Form $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ (für eine λ-äre Signatur τ) sind die λ-präsentierbaren Objekte genau die λ-präsentierten Objekte (siehe 4.16).
- In reflektiven Unterkategorien von Kategorien der Form $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ (für eine λ-äre Signatur τ), die abgeschlossen unter λ-gerichteten Colimiten sind, ist ein λ-präsentierbares Objekt nicht notwendigerweise λ-präsentiert (siehe 4.23 - dies löst ein Problem in [GU], genaueres im letzten Abschnitt dieser Einführung).
- Somit ist eine reflektive Unterkategorie einer Kategorie der Form $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ (für eine λ-äre Signatur τ), die abgeschlossen unter λ-gerichteten Colimiten ist, nicht notwendigerweise eine λ-Orthogonalitätsklasse (dies wiederlegt ein Theorem in [AR], siehe ebenfalls unten).

Anwendungen

Die Kenntnis der Beziehungen zwischen den verschiedenen Kleinheitsbedingungen an Objekte hat etwa folgende Anwendungsmöglichkeiten:

- Auch diejenigen Kleinheitsbedingungen, die relativ zu einem Vergißfunktor definiert sind (zum Beispiel λ-präsentiert), erhalten so abstrakte Charakterisierungen relativ zu den Bedingungen an die (die Objekte enthaltenden) Unterkategorien von $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ (die zum Teil auch äquivalent zu abstrakten Bedingungen an Kategorien sind, vergleiche 3.5(6)), die für die jeweilige Implikation hinreichend sind. Somit sind diese Kleinheitsbedingungen unter Äquivalenzfunktoren invariant, sofern Domain und Codomain des Funktors die Bedingungen an die Kategorie erfüllen.
- Einige der Bedingungen werden durch $\forall_n$-Formelschemata (vergleiche [Hy], [ChKei p116]) definiert (nämlich 4.1: 1-7 und 4.6: d), und einige durch $\exists_n$-Formelschemata (4.6: b,c,e). Um eine bestimmte Kleinheitsbedingung bei einem gegebenen Objekt zu überprüfen, ist es vorteilhaft,

diese Bedingung sowohl als $\forall_n$-, als auch als $\exists_n$-Formel formulieren zu können: Denn es ist oft einfacher, die Gültigkeit einer Aussage zu zeigen, die als $\exists_n$-Formel $\exists\vec{x} : \phi(\vec{x})$ gegeben ist, da es relativ einfach sein mag, ein $\vec{x}$ anzugeben, sodaß die (weniger komplexe) $\forall_{n-1}$-Formel $\phi(\vec{x})$ gilt. Und andererseits ist es oft einfacher, eine $\forall_n$-Formel $\forall\vec{x} : \phi(\vec{x})$ zu verwenden, wenn man zeigen will, daß eine Aussage nicht gilt, da es dafür reicht, ein $\vec{x}$ anzugeben, sodaß $\neg\phi(\vec{x})$ gilt.

Anwendungen finden die untersuchten Kleinheitsbedingungen an Objekte etwa in folgenden Zusammenhängen:

- Berechnung von Homologie-Gruppen (im Kontext von Termersetzungssystemen siehe [La]).
- Mittels "lokaler Theoreme" kann man zum Beispiel eine bestimmte Eigenschaft einer gegebenen Gruppe nachzuweisen, indem man diese Eigenschaft bei allen ihren endlich erzeugten Untergruppen zeigt (siehe [M71 ch.3], [Rot ch6]). Weitere lokale Theoreme gibt es in der universellen Algebra [C81 p101] (zum Beispiel auch eine Charakterisierung von Quasivarietäten, vergleiche [M71 p29]).

Zur Bedeutung der einzelnen berücksichtigten Bedingungen an die Unterkategorien von $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ vergleiche für den Stellenwert von Horn Theorien (der Verallgemeinerung von Quasivarietäten zu Kategorien von Strukturen) in der theoretischen Informatik: [Mak], [Vol].

Überblick über die Inhalte der einzelnen Kapitel

Nachdem in Kapitel 1 die Präliminarien geklärt werden, wird im Abschnitt 2.1 ein Gegenbeispiel zu der Aussage angegeben, daß jede λ-direktive reflektive Unterkategorie einer lokal λ-präsentierbaren Kategorie vermöge ihrer Einbettung eine λ-orthogonale Unterkategorie ist. Da bislang das Gegenteil angenommen wurde (vergleiche [AR 1.39]), ist dieses Ergebnis für sich von Interesse, darüberhinaus wird das Beispiel in Kapitel 4 weiterverwendet. Im Abschnitt 2.2 sind einige Eigenschaften lokal präsentierbarer Kategorien zusammengestellt, die in den folgenden Kapiteln Anwendung finden, und im letzten Abschnitt des Kapitel 2 (wie in den jeweils letzten Abschnitten der Kapitel 3 und 4) werden weitere Literaturhinweise zu verwandten Themen gegeben.
Kapitel 3 enthält einige Fakten in Kategorien von Algebren, die im folgenden Kapitel verwendet werden. Außerdem wird eine Hierarchie von Unterkategorien ei-

nes $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ vorgestellt, relativ zu der anschließend Aussagen über Colimes-Senken, Vereinigungen etc. in Kategorien von Algebren (und im Kapitel 4 über Kleinheitsbedingungen an Objekte) getroffen werden, wobei jeweils die schwächstmögliche Bedingung an die Kategorie angegeben wird, unter der die Aussage wahr ist.
Im Kapitel 4 wird festgestellt, welche Implikationen zwischen verschiedenen Kleinheitsbedingungen an Objekte in Kategorien von Algebren mit bestimmten Eigenschaften bestehen. Für jede Implikation wird jeweils die schwächste Voraussetzung bezüglich der in Kapitel 3 vorgestellten Hierarchie von Unterkategorien angegeben, die für die Gültigkeit der Implikation hinreichend ist.
Kleinheitsbedingungen, die speziell in Bezug auf Generatoren eine Rolle spielen (zum Beispiel die Bedingung "abstractly finite"), wurden in dieser Arbeit nicht untersucht (für Literaturhinweise zu hier nicht behandelten Kleinheitsbedingungen siehe D.3).
Der Übersichtlichkeit halber werden die Kleinheitsbedingungen in zwei Gruppen untersucht: In Abschnitt 4.1 geht es um "externe" Kleinheitsbedingungen an ein Objekt, das heißt um solche, die Bewahreigenschaften des zugehörigen kovarianten Hom-Funktors darstellen. Und in Abschnitt 4.2 werden "interne" Kleinheitsbedingungen untereinander und mit den wichtigeren der "externen" verglichen. Dabei sind mit "internen" Kleinheitsbedingungen an ein Objekt diejenigen gemeint, die über extremale bzw. reguläre Epimorphismen (bzw. Epi-Senken) mit dem betreffenden Objekt als Codomain definiert werden (auch wenn sie zum Teil den Vergißfunktor einbeziehen).
Zwei der in 4.2 angeführten Implikationen werden der Übersichtlichkeit halber in zwei Unterabschnitten von Abschnitt 4.2 gezeigt. Dazu wird im ersten Unterabschnitt gezeigt, daß freie Objekte über Mengen von Kardinalität kleiner als λ in λ-orthogonalen Unterkategorien von λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ eine Art Projektivitätsbedingung erfüllen. Aus der Gültigkeit der in diesem Unterabschnitt untersuchten Implikation ergeben sich auch Bedingungen, unter denen die in [GU 7.7e] aufgeworfene Fragestellung einer einfachen Charakterisierung von λ-präsentierbaren Objekten (mittels eines Coegalisator von λ-kleinen Coprodukten eines λ-präsentierbaren regulären Generators) positiv beantwortet wird.
Zum Beweis der Implikation im zweiten Unterabschnitt wird gezeigt, daß die Zerlegung eines beliebigen Morphismus in extremale Epimorphismen mittels Komposition und Bildung von Colimiten von Ketten in covollständigen Kategorien mit Pullbacks [GU 1.5] λ-gerichtete Colimiten bewahrt (zumindest im benötigten Spezialfall der λ-direktiven reflektiven Unterkategorien von λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$).
In Abschnitt 4.3 wird (im Rahmen der Untersuchungen von Abschnitt 4.2) gezeigt, daß λ-präsentierbare Objekte in λ-gerichteten reflektiven Unterkategorien von λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ im allgemeinen nicht λ-präsentiert sind, und damit gleichzeitig

die in [GU 7.7e] erwähnte Fragestellung (siehe oben) negativ beantwortet.

Danksagung

Ich danke

- Prof. Porst und Prof. Herrlich für die weise Aufgabenstellung und die engagierte und kompetente Betreuung,
- Prof. Adamék (Braunschweig) für die Ermunterung, einen Teil dieser Arbeit in einem weiteren Kreis zu veröffentlichen,
- dem KatMAT Seminar, insbesondere L. Schröder, D. Hofmann und R. Rother für hilfreiche Diskussionen, sowie K. Wesling und B. Lang für LaTeX-niche und XY-pic-nicke Hilfestellungen,
- Dr Johnstone und Dr Hyland (beide Cambridge) für ausgezeichnete Einführungen in die Kategorien- und Modelltheorie,
- der Studienstiftung des Deutschen Volkes für ideelle und finanzielle Unterstützung
- und nicht zuletzt meinen Eltern und meinem Bruder für moralischen Beistand.

Two roads diverg'd in a wood and I,
I took the one less trodden by.
And that has made all the difference.
Robert Frost

$

Kapitel 1

Präliminarien

1.1 Allgemeine Präliminarien

1.1 Konvention

(1) "Wir" bezeichnet im folgenden den/die Leser/in und den Autor.

(2) Zu den mengentheoretischen Grundlagen vergleiche [AHS ch2].

(3) Für $X = (X_s)_{s \in \mathcal{S}} \in \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$ (Kategorie der $\mathcal{S}$-sortigen Mengen ist $\operatorname{card} X := \sum_{s \in \mathcal{S}} \operatorname{card} X_s$.

(4) λ sei im folgenden stets eine reguläre Kardinalzahl.

(5) Es gilt $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, ...

(6) Eine Senke $(X_i \xrightarrow{f_i} X)_{i \in I}$ in **Set** heißt **überdeckend**, wenn gilt $X = \bigcup_{i \in I} f_i[X_i]$.

(7) **abzählbar** bedeutet höchstens abzählbar.

1.2 Bemerkung

Da wir das Auswahlaxiom zugrundelegen, sind $\aleph_\alpha$ (für $\alpha \in \mathbf{Ord}$) genau die unendlichen Cardinalzahlen [Jo87 p88-90], und $\aleph_{\alpha+1}$ sind reguläre Cardinalzahlen [vDDoSw II.10.18] (andernfalls existiert eine Hypothese, daß es konsistent sein könnte, anzunehmen, daß ω die einzige reguläre Ordinalzahl ist ! [vDDoSw p179]). Für Mengen X_i ($i \in I$ mit $\operatorname{card} I < \lambda$) von Kardinalität kleiner λ gilt $\operatorname{card} \coprod_{i \in I} X_i < \lambda$. Für $\lambda = \aleph_0$ gilt auch $\operatorname{card} \prod_{i \in I} X_i < \lambda$ (aber nicht für allgemeines λ, vergleiche 4.8: a $\overset{A}{\not\Rightarrow}$ 2).

1.3 Fakt
Sei $\mathcal{X}$ eine Menge, $x_* \in \mathcal{X}$ und $\to$ eine Relation auf $\mathcal{X}$ mit transitiver Hülle $\rightsquigarrow$, sodaß

(a) $\mathcal{X} = (\{x_*\}_\prod \mathcal{X}) \cap \rightsquigarrow$

(b) $\forall x \in \mathcal{X} : \operatorname{card}((\{x\}_\prod \mathcal{X}) \cap \to) < \lambda$

(c) *und jede $\to$-Kette in $\mathcal{X}$ endlich ist.*

Dann gilt $\operatorname{card} \mathcal{X} < \lambda$.

Beweis
Angenommen, es gelten a) und b), aber $\operatorname{card} \mathcal{X} \geq \lambda$. Dann erhält man (aufgrund der Regularität von λ) induktiv x_n (für $n \in \mathbb{N}$) mit $x_0 = x_*$, $x_{n+1} \in (\{x_n\}_\prod \mathcal{X}) \cap \to$ und $\operatorname{card}((\{x_n\}_\prod \mathcal{X}) \cap \rightsquigarrow) \geq \lambda$, im Widerspruch zu c). \$

1.2 Kategorielle Präliminarien

1.4 Konvention
Soweit nicht anders eingeführt, sind die Definitionen und Notationen die von [AHS] (für die allgemeine Kategorientheorie), von [AR] (für die Theorie der lokal präsentierbaren Kategorien) und von [C81] bzw. [P] (für die Universelle Algebra). Siehe hierzu auch das Wörterbuch im Anhang B.
Außerdem gilt:

(1) Eine **Unterkategorie** sei im folgenden stets voll und isomorphieabgeschlossen !

(2) Die **Komposition** von Morphismen wird gemäß Konvention verkehrtherum geschrieben: $g \circ f := (\bullet \xrightarrow{f} \bullet \xrightarrow{g} \bullet)$.

(3) Für $A \in \operatorname{Ob}\mathbf{A}$ schreiben wir auch $A \in \mathbf{A}$, für $A \xrightarrow{f} B \in \operatorname{Mor}\mathbf{A}$ auch $A \xrightarrow{f} B \in \mathbf{A}$.

(4) Wird ein Objekt als Objekt mehrerer verschiedener Kategorien aufgefaßt (z.B. bei Unterkategorien), so kann durch Zusatz deutlich gemacht werden, auf welche Kategorie sich ein Begriff bezieht, z.B. $\mathbf{A}$−λ-präsentierbar.

(5) Eine Unterkategorie $\mathbf{C}$ einer Kategorie $\mathbf{A}$ ist **abgeschlossen unter** (z.B.) **Colimiten**, wenn jeder $\mathbf{A}$-Colimes eines Diagramms D in $\mathbf{C}$ in $\mathbf{C}$ liegt (und somit wegen 1.4(1) $\mathbf{C}$-Colimes von D ist) - insbesondere impliziert dies die Existenz von $\mathbf{C}$-Colimiten zu $\mathbf{C}$-Diagrammen, die $\mathbf{A}$-Colimiten besitzen.

(6) Für eine konkrete Kategorie $\mathbf{A}$ steht $|_|$ für den zugehörigen Vergißfunktor, falls aus dem Zusammenhang hervorgeht, welcher gemeint ist (zur besseren Lesbarkeit werden die $|$ teilweise auch fortgelassen). Analoges gilt gegebenenfalls für den freien Funktor $F_{\mathbf{A}}$. Ein universeller Pfeil wird geschrieben als $X \xrightarrow{u_X} FX$.

(7) Ein **$\mathcal{S}$-Konstrukt** (für eine Sortenmenge $\mathcal{S}$) ist eine Kategorie mit einem treuen Funktor nach $\mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$.

(8) Existiert in einem ($\mathcal{S}$-)Konstrukt $\mathbf{A}$ das von einer ($\mathcal{S}$-sortigen) Menge S in einem Objekt A mit $S \subseteq |A|$ erzeugte Unterobjekt (d.h. der kategorientheoretische Durchschnitt der S enthaltenden Unterobjekte), so bezeichnen wir es mit $< S >_A$.

(9) const_a bezeichnet in einem ($\mathcal{S}$-)Konstrukt den konstanten Morphismus mit Wert a (so er existiert).

(10) Ist eine Unterkategorie $\mathbf{C}$ von $\mathbf{A}$ reflektiv, so habe der Reflektor die Bezeichnung R, und der Reflektionspfeil für $A \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{A}$ die Bezeichnung $r_A : A \to RA$ (nach obiger Generalvoraussetzung an $\mathbf{C}$ ist r_C für jedes $C \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{C}$ ein Iso [AHS 4.20]).

1.5 Definition

- Ein **Monodiagramm** ist ein Funktor, in dessen Bild jeder Morphismus ein Monomorphismus ist.
- Ein Objekt A ist eine **Vereinigung** der Unterobjekte $(A_i \xrightarrow{m_i} A)_{i \in I}$, wenn für jedes Unterobjekt $B \xrightarrow{m} A$, das alle m_i enthält (d.h. jedes m_i faktorisiert durch m), m Isomorphismus ist [AR 1.63]. A ist eine **λ-gerichtete Vereinigung** der Unterobjekte $(A_i \xrightarrow{m_i} A)_{i \in I}$, wenn es ein (notwendigerweise Mono-)Diagramm gibt, bgzl. dessen $(m_i)_{i \in I}$ natürlich ist, und wenn für jedes Unterobjekt $B \xrightarrow{m} A$, das alle m_i enthält , m Iso ist.

1.6 Definition

Eine Unterkategorie heißt **λ-direktiv**, wenn sie abgeschlossen gegenüber λ-gerichteten Colimiten ist [BH 152].

1.7 Konvention

Existiert in einem Konstrukt $\mathbf{A}$ mit freien Objekten zu $A \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{A}$, einer Menge I und $s_i, t_i \in |A|$ (für $i \in I$) der Coegalisator

$$F_{\mathbf{A}}\{(s_i, t_i) : i \in I\} \underset{q}{\overset{p}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{c} \bar{A},$$

wobei p und q durch $p((s_i,t_i)) = s_i$ und $q((s_i,t_i)) = t_i$ definiert sind, so bezeichnen wir das Objekt $\bar{A}$ auch durch

$$(A/_{\bigwedge_{i\in I} s_i=t_i})_{\mathbf{A}}$$

(dabei kann die Angabe **A** auch entfallen, falls aus dem Zusammenhang ersichtlich ist, in welcher (Unter-)Kategorie der Coegalisator gebildet werden soll).

1.8 Fakt
Es gilt

$$(A/_{\bigwedge_{i\in I} t_i=s_i})/_{\bigwedge_{i\in J} qt_i=qs_i} = A/_{\bigwedge_{i\in I\cup J} t_i=s_i}$$

für ein Objekt A in einem Konstrukt **A** *(mit freien Objekten) und $t_i, s_i \in |A|$ $(i \in I \cup J)$, falls die beiden Coegalisatoren auf der linken Seite existieren (wobei $A \xrightarrow{q} A/_{\bigwedge_{i\in I} t_i=s_i}$ der Quotient sei).* \$

1.9 Definition
Wir sagen, daß eine Unterkategorie **C** einer konkreten Kategorie **A kanonische freie Objekte** hat, wenn der kanonische Vergißfunktor von **C** (d.h. die Komposition aus Einbettung von **C** in **A** und Vergißfunktor von **A**) adjungiert ist (konsistenter mit [AHS 5.21,8.26], aber leicht verwechselbar mit "konkrete Unterkategorie mit freien Objekten", wäre die Bezeichnung "konkrete Unterkategorie-mit-freien-Objekten").

1.10 Bemerkung

(1) Eine Unterkategorie **C** mit kanonischen freien Objekten des Konstruktes **A** hat als Monoquellen genau die **A**-Monoquellen, die in **C** liegen (denn beide Vergißfunktoren bewahren und reflektieren Monoquellen, da sie treu und adjungiert sind), und die **C**-Monoquellen sind **C**-initial (wegen [AHS 23.2,23.6] und 1.4(1)).

(2) Sei **C** eine unterobjektabgeschlossene Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten eines (Erzeugend, Mono-Quelle)-faktorisierbaren Konstruktes. Ein strukturierter Pfeil $X \xrightarrow{g} C$ zu $C \in \mathbf{C}$ ist genau dann extremal **C**-erzeugend, wenn er extremal **A**-erzeugend ist:
Sei g extremal **C**-erzeugend. Sei $g = m \circ g'$ eine **A**-(Erzeugend, Monomorphismus)-Faktorisierung. Dann ist m in **C**, und zwar **C**-Monomorphismus, also Isomorphismus, und g ist somit **A**-erzeugend. g ist **A**-extremal nach Annahme an **C**, weil es **C**-extremal ist.

Sei g extremal **A**-erzeugend. Dann ist g **C**-erzeugend, weil die Einbettung treu ist, und **C**-extremal, weil **C**-Monomorphismen **A**-Monomorphismen sind (siehe (1)).

1.11 Definition
Eine Menge $\mathcal{G} \subseteq \mathrm{Ob}\mathbf{C}$ (**C** covollständig) ist ein **regulärer Generator** wenn für jedes $X \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$ der kanonische Morphismus

$$\coprod_{G\in\mathcal{G}} \coprod_{f\in\hom(G,X)} G \xrightarrow{[f]} X$$

ein regulärer Epi ist [A94 3]. $\mathcal{G}$ ist ein **schwach regulärer Generator**, wenn jedes **C**-Objekt regulärer Quotient eines Coprodukts von $\mathcal{G}$-Objekten ist.
Ein **Generator** heißt λ-**präsentierbar**, wenn seine Elemente es sind.

1.12 Bemerkung
Diese Definition eines regulären Generators stimmt unter der angegebenen Voraussetzung mit der in [GU 1.11] überein (die lediglich fordert, daß $[f]$ ein strikter Epi ist), denn: In einer kovollständigen Kategorie mit Generator ist ein strikter Epi regulär [GU 1.4].

1.13 Fakt
Reflektoren bewahren reguläre Generatoren.

Beweis
Sei **C** reflektive Unterkategorie von **A**, R der zugehörige Reflektor und $\mathcal{G}$ ein regulärer Generator in **A**. Wir wollen zeigen, daß $\bar{\mathcal{G}} := \{RG : G \in \mathcal{G}\}$ regulärer Generator in **C** ist.
Sei $C \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$. Dann existiert ein **A**-Coegalisator

$$A \underset{q}{\overset{p}{\rightrightarrows}} \coprod_{G\in\mathcal{G}} \coprod_{f\in\hom_{\mathbf{A}}(G,C)} G \xrightarrow{[f]} C$$

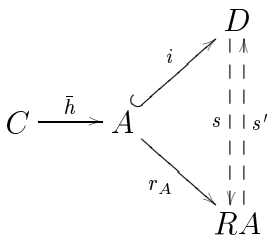
Es gilt $\hom_{\mathbf{A}}(G,C) \cong \hom_{\mathbf{C}}(RG,C)$ (via $f \mapsto \bar{f} := Rf$, mit $\bar{f} \circ r_G = f$) und R bewahrt Coprodukte, also haben wir (bis auf Iso) einen **C**-Coegalisator

$$RA \underset{\bar{q}}{\overset{\bar{p}}{\rightrightarrows}} \coprod_{\bar{G}\in\bar{\mathcal{G}}} \coprod_{\bar{f}\in\hom(\bar{G},C)} \bar{G} \xrightarrow{[\bar{f}]} C$$

(denn es gilt $RC \cong C$, da **C** voll). $

1.14 Fakt
Sei **C** *reflektive Unterkategorie der Kategorie* **A** *und sei* $C \xrightarrow{h} D$ **C***-regulärer Epimorphismus. Sei* $h = C \xrightarrow{\bar{h}} A \xhookrightarrow{i} D$ *eine* **A***-(RegEpi,Mono)-Faktorisierung. Dann ist* i *Reflektionspfeil.*

Beweis
Sei h Coegalisator von (f, g). Es folgt $r_A \circ \bar{h} \circ f = r_A \circ \bar{h} \circ g$ und somit existiert ein eindeutiges $D \xrightarrow{s} RA$, sodaß $s \circ h = r_A \circ \bar{h}$. Wegen Universalität von r_A existiert ein eindeutiges $RA \xrightarrow{s'} D$, sodaß $i = s' \circ r_A$.



Es gilt $s' \circ s \circ h = s' \circ r_A \bar{h} = i \circ \bar{h} = h$, also $s' \circ s = id_A$ (h ist Epimorphismus) und $s \circ s' \circ r_A = s \circ i = r_A$ (letzteres, weil $\bar{h}$ **A**-Epimorphismus ist), also $s \circ s' = id_{RA}$ (r_A ist Reflektion). Somit ist s Isomorphismus, also $A \xhookrightarrow{i} D$ ein Reflektionspfeil. $

1.3 Präliminarien in Kategorien von Algebren

1.15 Definition
$\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ bezeichnet die Kategorie der $\mathcal{S}$-sortigen τ-Algebren mit $\mathcal{S}$-sortigen τ-Homomorphismen für eine Sortenmenge $\mathcal{S}$ und eine (möglicherweise unendliche) $\mathcal{S}$-sortige Signaturmenge τ. Hat jede Operation weniger als λ Argumente, so werden τ und $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ λ-är genannt. Ist τ unär, wird es im allgemeinen durch ein Σ ersetzt.

1.16 Bemerkung
Da τ per Definition eine Menge ist, existiert für jedes $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ ein λ, sodaß $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ λ-är ist.
Zu den Problemen, die auftreten, wenn man für τ eine Klasse zuläßt, vergleiche [Neu69], [AHS 24.11], [H90], [H93], [Jo 3.8,4.7,4.10] und [Lan, Kap.3.2.2,3.6.2].

1.17 Konvention

- Der Begriff **Term** wird auch für Termfunktionen verwendet.

- 1_s bezeichne dasjenige Objekt $X = (X_{s'})_{s' \in \mathcal{S}} \in \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$ mit $X_s = 1$ und $X_{s'} = \emptyset$ für $s' \in \mathcal{S}$ mit $s' \neq s$. Sei für $s \in \mathcal{S}$ der Funktor $\mathbf{Set}^{\mathcal{S}} \xrightarrow{U_s} \mathbf{Set}$ definiert durch

$$U_s(\ (X_s)_{s\in\mathcal{S}} \xrightarrow{(f_s)_{s\in\mathcal{S}}} (Y_s)_{s\in\mathcal{S}}\ ) = (\ X_s \xrightarrow{f_s} Y_s\ ).$$

1.18 Bemerkung
Es gilt $id_{\mathbf{Set}^{\mathcal{S}}} \cong (U_s(_))_{s\in\mathcal{S}}$ und die U_s $(s \in \mathcal{S})$ reflektieren gemeinschaftlich Colimiten.
Sei $\mathbf{C}$ eine Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten eines $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$. Dann gilt für jedes $s \in \mathcal{S} : U_s \circ U_{\mathbf{C}} \cong \hom_{\mathbf{C}}(F_{\mathbf{C}}1_s, _)$.
Wegen der Kontravarianz von $\hom_{\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau}(_,_)$ in der ersten Variablen gibt es aber, außer für $\mathcal{S} = \emptyset$ und $\mathcal{S} \cong 1$, im allgemeinen kein $A \in \mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ mit $U_{\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau} \cong \hom^{\mathcal{S}}_{\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau}(A, _)$ für

$$\hom^{\mathcal{S}}_{\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau}((X_s)_{s\in\mathcal{S}}, (Y_s)_{s\in\mathcal{S}}) = (\{f_s : (f_{s'})_{s'\in\mathcal{S}} \in \hom_{\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau}((X_{s'})_{s'\in\mathcal{S}}, (Y_{s'})_{s'\in\mathcal{S}})\})_{s\in\mathcal{S}}$$

(denn $A = \emptyset$ tut dies nur für $\mathcal{S} = \emptyset$, $A = F_{\mathbf{A}}1_s$ für ein $s \in \mathcal{S}$ für $\mathcal{S} \cong 1$, und jedes andere A ist nicht-triviales Coprodukt von Objekten 1_s $(s \in \mathcal{S})$).

1.19 Beispiel
$\{F_{\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau}1_s : s \in \mathcal{S}\}$ *ist regulärer Generator in* $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$.

Beweis
Der kanonische Morphismus $[f]$ ist hier (bis auf einen Isomorphismus) die Fortsetzung $F_{\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau}|X| \to X$ von $id_{|X|}$, denn: Es gilt $\hom_{\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau}(F_{\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau}1_s, X) \cong \hom_{\mathbf{Set}}(1_s, |X|) \cong |X_s|$ in kanonischer Weise und der Coadjungierte F bewahrt Coprodukte.
Also ist $[f]$ surjektiv und somit regulärer Epi [AHS 7.72(3), AR 3.4(2)vi]. $

1.20 Fakt ([C81 3.8] oder [P I.10,II.28])
Sei $(\ A \xrightarrow{f} B\ ) \in \operatorname{Mor}\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ *für eine Signatur* τ, *eine Sortenmenge* $\mathcal{S}$, I *eine Menge und* $s_i, t_i \in |A|$ *(für* $i \in I$*). Gilt für jedes* $i \in I$: $f(s_i) = f(t_i)$, *dann existiert ein eindeutiges* $(\ A \xrightarrow{\bar{f}} B\ ) \in \operatorname{Mor}\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ *mit*

$$(\ A \xrightarrow{f} B\ ) = (\ A \xrightarrow{q} A/_{\bigwedge\limits_{i\in I} s_i = t_i} \xrightarrow{\bar{f}} B\ )$$

(mit der Quotientenabbildung q*).* $

1.21 Fakt (AHS 16.11)
Sei $\mathbf{A} := \mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ *für eine Signatur* τ *und eine Sortenmenge* $\mathcal{S}$*, seien* X, I, J *Mengen, seien* $t_i, s_i \in |F_{\mathbf{A}}X|$ $(i \in I \cup J)$ *und* $A \in \mathbf{A}$*. Für den Quotientenmorphismus* $F_{\mathbf{A}}X/_{\bigwedge_{i\in I} t_i=s_i} \xrightarrow{q} F/_{\bigwedge_{i\in I\cup J} t_i=s_i}$ *gilt dann:*
A ist genau dann orthogonal zu q (kurz $A \perp q$*, siehe [AR 1.32]), wenn jede Interpretation der Variablenmenge X, die alle Voraussetzungen* (t_i, s_i) $(i \in I)$ *erfüllt, auch die Konklusionen* (t_i, s_i) $(i \in J)$ *erfüllt.* \$

1.22 Bemerkung
Neben der in 1.7 definierten Darstellung werden einsortige unäre Algebren in $\mathbf{A}$:=$\mathbf{Alg}\,\mathbf{\Sigma}$ im folgenden häufig auch als freie (totale) Algebren über partiellen Algebren (vergleiche [Grä §28]) gegeben, deren unterliegender Graph (mit der Menge Σ der Kantensorten) graphisch wiedergegeben wird: Für $\Sigma = \{k, p\}$ etwa

$$(F_{\mathbf{A}}1/_{p0=0}) = \overset{p}{\circlearrowright}\,0$$

(ein Pfeil $1 \overset{l}{\mapsto} 0$ bedeutet dabei $l1 = 0$, angegeben ist im allgemeinen die "kleinste" partielle Algebra, über der die betreffende Algebra frei ist).
Für die freie totale Algebra A in $\mathbf{A}$ über einer partiellen Algebra P gilt $A = F_{\mathbf{A}}|P|/_R$ mit der (partiellen) Kongruenz

$$R = \{(\vec{t}_1(x_1), \vec{t}_2(x_2)) : \vec{t}_i \text{ auf } P \text{ definierte Terme}, x_i \in |P|\}.$$

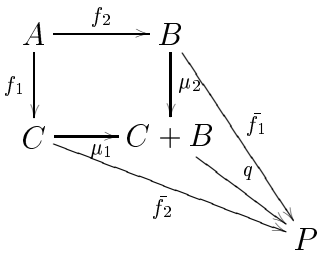
Die von R erzeugte (totale) Kongruenz auf $F_{\mathbf{A}}|P|$ ist die von $R \cup \Delta$ (Δ die Diagonale auf $F_{\mathbf{A}}|P|$) erzeugte (totale) Unteralgebra S von $F_{\mathbf{A}}|P|$, da $\mathbf{A}$ unär und R eine Kongruenz ist (Nach [C81 p57Def] reicht es zu zeigen, daß S eine Äquivalenzrelation ist. Reflexivität folgt wegen Δ, Symmetrie folgt aus der Symmetrie von R, und, da $\mathbf{A}$ unär ist, folgt die Transitivität aus der Transitivität von R: Aus $\vec{t}_1(x_1)S\vec{t}_2(x_2)S\vec{t}_3(x_3)$ folgt, per Definition S, $\vec{t}_1 = \vec{t}_2 = \vec{t}_3$ und $x_1Rx_2Rx_3$, also x_1Rx_3 und somit $\vec{t}_1(x_1)S\vec{t}_3(x_3)$.). Der universelle Morphismus $P \longrightarrow A$ ist daher injektiv.

1.23 Fakt (AHS 13.13(1))
Für unäres Σ *sind in* $\mathbf{Alg}\,\mathbf{\Sigma}$ *die Colimiten konkret.* \$

1.24 Fakt
Sei
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f_2} & B \\ {\scriptstyle f_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{f}_1} \\ C & \xrightarrow[\bar{f}_2]{} & P \end{array}$$
ein Pushout-Diagramm in $\mathbf{Alg}\,\mathbf{\Sigma}$*,* $x \in B$*.*

Gilt $\bar{f}_1(x) = \bar{f}_1(y)$ *für* $x \neq y \in B$ *oder* $\bar{f}_1(x) = \bar{f}_2(y)$ *für* $y \in C$*, dann folgt* $x \in f_2[A]$*. Insbesondere gilt:* $\bar{f}_1(x) \in \bar{f}_2[C]$ *impliziert* $x \in f_2[A]$*.*

Beweis
Wir zeigen, daß die Aussage in **Set** gilt (und damit auch in $\mathbf{Alg}\,\Sigma$, da für unäres Σ die Colimiten konkret sind (1.23)). Der Pushout wird per Coprodukt und Coegalisator konstruiert [AHS 11.11]:



Es gelte $\bar{f}_1(y) = \bar{f}_1(x)$ für $x \neq y \in B$ (der Fall $y \in C$ folgt analog), d.h. es gilt $q(\mu_2(y)) = q(\mu_2(x))$. Somit existieren $n \in \mathbb{N}$ und $a_i \in A$ $(i = 1, ..., n)$ sodaß

$$y = f_2(a_1) \wedge f_1(a_1) = f_1(a_2) \wedge ... \wedge f_2(a_n) = x$$

(Äquivalenzhülle von $\{(\mu_1(f_1(a)), \mu_2(f_2(a))) : a \in A\}$, vgl. [AHS 7.69(1)]; die μ_i sind injektiv und es gilt $\mu_1[C] \cap \mu_2[B] = \emptyset$). Insbesondere gilt also $x \in f_2[A]$. \$

1.25 Definition
In einer Kategorie der Form $\mathbf{Alg}\,\Sigma$ für eine unäre Sortenmenge Σ heißt ein Objekt A **relativ frei**, wenn gilt:

$$\forall l, l' \in \Sigma; x, x' \in A : (l(x) = l'(x') \Rightarrow l = l' \wedge x = x')$$

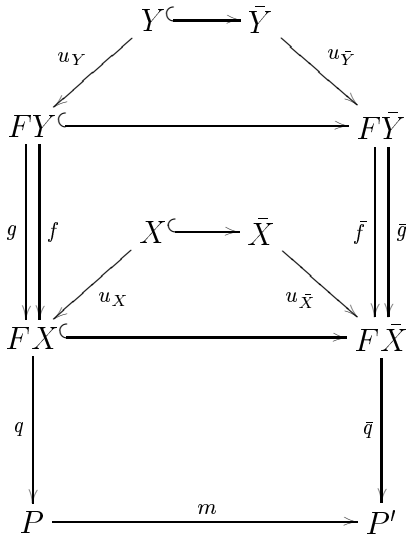
1.26 Bemerkung
In einer Kategorie der Form $\mathbf{Alg}\,\Sigma$ für eine unäre Sortenmenge Σ sind die relativ freien Objekte genau die Colimiten gerichteter (Mono-)Diagramme von $\mathbf{Alg}\,\Sigma$-freien Objekten: Gerichtete $\mathbf{Alg}\,\Sigma$-Colimiten relativ freier Objekte sind relativ frei, da ihre Colimes-Senken aus (injektiven) $\mathbf{Alg}\,\Sigma$-Monomorphismen bestehen (siehe 3.6).
Und für jede endliche Teilmenge X einer relativ freien Algebra A wird $< X >_A$ frei von dem minimalen $X' \subseteq X$ mit $< X' >_A = < X >_A$ erzeugt (das heißt $< X' >_A \cong F_{\mathbf{Alg}\,\Sigma} X'$): Angenommen, es existieren $l_0, ... l_n, l'_0, ..., l'_{n'} \in \Sigma; x, x' \in X'$ mit $l_0(...(l_n(x))...) = l'_0(...(l'_{n'}(x')))$. Ohne Einschränkung sei $l \geq l'$. Aus der relativen Freiheit von A folgt dann induktiv $x' = l_{n'+1}(...(l_n(x))...)$, aus der Minimalität von X' folgen also $n = n'$ und $x' = x$.
Die Unterkategorie der relativ freien Objekte ist für $\operatorname{card}\Sigma > 1$ nicht reflektiv: Für $l \neq l' \in \Sigma$ hat $A := (F_{\mathbf{Alg}\,\Sigma} 1/_{l0=l'0})_{\mathbf{Alg}\,\Sigma}$ keinen Reflektionspfeil, da für jeden Homomorphismus f (mit Domain A) $l(f(0)) = l'(f(0))$ gilt.
Ein Beispiel für eine unfreie relativ freie Algebra ist in $\mathbf{Alg}\{\mathbf{l}\}$: $F_{\mathbf{Alg}\{\mathbf{l}\}}\mathbb{Z}/_{\bigwedge\limits_{z \in \mathbb{Z}} lz = z+1}$.

1.27 Lemma

Sei $\mathbf{A}$ *ein* $\mathcal{S}$*-Konstrukt mit freien Objekten, seien* $FY \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} FX \xrightarrow{q} P$ *und* $FY' \underset{g'}{\overset{f'}{\rightrightarrows}} FX' \xrightarrow{q'} P'$ *Coegalisatoren mit* $X, Y, X', Y' \in \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$ *jeweils von Kardinalität kleiner* λ *und surjektivem* q'*. Sei* $P \xrightarrow{m} P' \in \mathbf{A}$*.*

Dann existiert ein Coegalisator $F\bar{Y} \underset{\bar{g}}{\overset{\bar{f}}{\rightrightarrows}} F\bar{X} \xrightarrow{\bar{q}} P$ *mit* $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$ *jeweils von Kardinalität kleiner* λ *und* $Y \subseteq \bar{Y}$*, sowie* $X \subseteq \bar{X}$*, sodaß folgendes Diagramm kommutiert:*

(1.1)



Beweis

Da FX surjektiv-projektiv ist [AHS 9.29], existiert $\bar{m}$, sodaß $\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{\bar{m}} & FX' \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q'} \\ P & \xrightarrow[m]{} & P' \end{array}$ kommutiert. Seien $\bar{X} := X \amalg X'$, $\bar{Y} := Y \amalg <\bar{m}, id_{FX}> [u_X[X]] \amalg Y'$, $\bar{f} := f \amalg [\pi_1 \circ i, f']$, $\bar{g} := [g, \pi_2 \circ i] \amalg g'$ und $\bar{q} := q' \circ [\bar{m}, id_{FX'}]$ (unter Ausnutzung der Assoziativität (bis auf Isomorphismen) des Coproduktes), es gelten also etwa

$$\bar{f} \circ \nu_3 = \mu_2 \circ f', \quad \bar{g} \circ \nu_3 = \mu_2 \circ g', \tag{1.2}$$

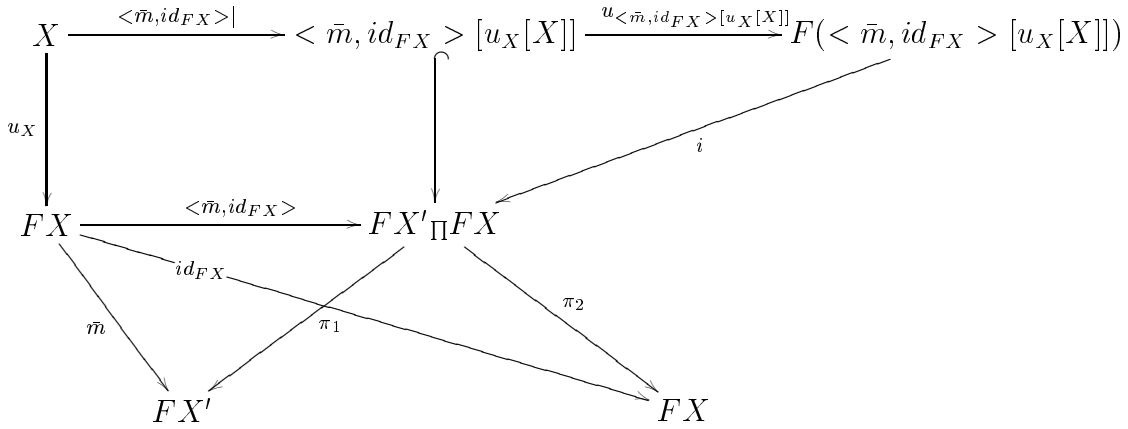
$$\bar{f} \circ \nu_2 = \mu_1 \circ \pi_1 \circ i, \quad \bar{g} \circ \nu_2 = \mu_1 \circ \pi_2 \circ i \tag{1.3}$$

mit den Coprodukt-Injektionen $FX \xrightarrow{\mu_1} F(X \amalg X')$, $FX' \xrightarrow{\mu_2} F(X \amalg X')$,

$$FY \xrightarrow{\nu_1} F(Y \amalg <\bar{m}, id_{FX}> [u_X[X]] \amalg Y'),$$

$$F <\bar{m}, id_{FX}>[u_X[X]] \stackrel{\nu_2}{\to} F(Y \amalg <\bar{m}, id_{FX}>[u_X[X]]_{\amalg} Y')$$
$$FY' \stackrel{\nu_3}{\to} F(Y \amalg <\bar{m}, id_{FX}>[u_X[X]]_{\amalg} Y').$$

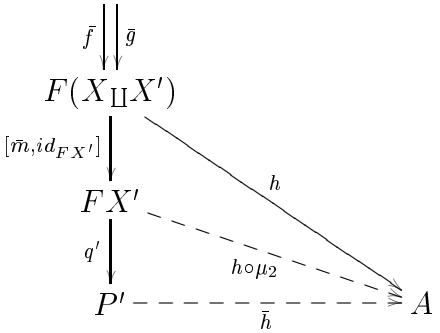
Dabei ist $F(<\bar{m}, id_{FX}>[u_X[X]]) \xrightarrow{i} FX'\prod FX$ die Fortsetzung von $<\bar{m}, id_{FX}>[u_X[X]] \hookrightarrow FX'\prod FX$, $\pi_{1,2}$ sind die Projektionen von $FX'\prod FX$ und es sei $<\bar{m}, id_{FX}>| := <\bar{m}, id_{FX}> \circ u_X|^{<\bar{m}, id_{FX}>[u_X[X]]}$:



(1.4)

Nach Konstruktion kommutiert dann (1.1), also bleibt zu zeigen, daß $\bar{q}$ der Coegalisator von $(\bar{f}, \bar{g})$ ist ($FY \hookrightarrow F\bar{Y}$ ist übrigens ein Schnitt, da der Coadjungierte F Colimiten bewahrt.): $\bar{q}$ ist Epimorphismus, da q' (nach Voraussetzung) und $[\bar{m}, id_{FX'}]$ [AHS 10.10(2),10.9(2)] Epimorphismen sind. Sei ($F(X \amalg X') \xrightarrow{h} A$) $\in$ **A** mit $h \circ \bar{f} = h \circ \bar{g}$. Gesucht ist ein $\bar{h}$ mit $\bar{h} \circ q' \circ [\bar{m}, id_{FX'}] = h$:

$$F(Y \amalg <\bar{m}, id_{FX}>[u_X[X]]_{\amalg} Y') \tag{1.5}$$



Nach Voraussetzung an h gilt für $x \in X$:

$$\begin{aligned} h(\mu_1(u_X(x))) &\stackrel{(1.4)}{=} h(\mu_1(\pi_2(<\bar{m}, id_{FX}>(u_X(x))))) \\ &\stackrel{(1.4)}{=} h(\mu_1(\pi_2(i(u_{<\bar{m}, id_{FX}>}(<\bar{m}, id_{FX}>|(x)))))) \\ &\stackrel{(1.3)}{=} h(\bar{g}(\nu_2(u_{<\bar{m}, id_{FX}>}(<\bar{m}, id_{FX}>|(x))))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{h}{=} && h(\bar{f}(\nu_2(u_{<\bar{m},id_{FX}>}(<\bar{m},id_{FX}>|(x)))))\\
&\overset{(1.3)}{=} && h(\mu_2(\pi_1(i(u_{<\bar{m},id_{FX}>}(<\bar{m},id_{FX}>|(x))))))\\
&\overset{(1.4)}{=} && h(\mu_2(\pi_1(<\bar{m},id_{FX}>(u_X(x)))))\\
&= && h(\mu_2([\bar{m},id_{FX'}](\mu_1(u_X(x)))))
\end{aligned}$$

Da ohnehin gilt $h(\mu_2(u_{X'}(x'))) = h(\mu_2([\bar{m},id_{FX'}](\mu_2(u_{X'}(x')))))$ (für $x' \in X'$), folgt $h = h \circ \mu_2 \circ [\bar{m},id_{FX'}]$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
h \circ \mu_2 \circ f' &\overset{(1.2)}{=} h \circ \bar{f} \circ \nu_3\\
&\overset{h}{=} h \circ \bar{g} \circ \nu_3\\
&\overset{(1.2)}{=} h \circ \mu_2 \circ g'.
\end{aligned}$$

Da q' der Coegalisator von (f',g') ist, existiert nun ein $\bar{h}$ mit $\bar{h} \circ q' = h \circ \mu_2$, also $\bar{h} \circ \bar{q} = h$ (s. (1.5)). \$

Kapitel 2

Lokal präsentierbare Kategorien

2.1 λ-Orthogonalitätsklassen

In diesem Abschnitt wird eine leichte Modifikation der Orthogonalitäts-Reflektions-Konstruktion vorgestellt, und die Darstellung der Beziehung zwischen λ-orthogonalen und λ-direktiven reflektiven Unterkategorien von lokal λ-präsentierbaren Kategorien in [AR 1.C] korrigiert, indem eine reflektive, endlich-direktive Unterkategorie einer lokal präsentierbaren Kategorie angegeben wird, die keine $\aleph_0$-Orthogonalitätsklasse ist.

2.1 Fakt
Sei F Coadjungierter von G, G bewahre Colimiten von λ-gerichteten (Mono-) Diagrammen. Dann bewahrt F λ-Präsentierbarkeit (bzw. λ-Erzeugbarkeit) von Objekten.

Beweis (vgl. Mat 2.5)
Es gilt $\hom(FX, _) \cong \hom(X, G_)$. \$

2.2 Bemerkung
Ein Coadjungierter bewahrt im allgemeinen nicht λ-Präsentierbarkeit von Objekten: Für $\mathbf{C} = \mathbf{pAb}$ ist $F_{\mathbf{C}}1$ nicht endlich präsentierbar (siehe 4.4, $2 \overset{G}{\not\to} 1$).

2.3 Fakt
Sei A ein λ-präsentierbares Objekt in einem $\mathcal{S}$-Konstrukt $\mathbf{A}$ mit freien Objekten und konkreten λ-gerichteten Colimiten und $t_i, s_i \in |A|$ $(i \in I)$ mit $\operatorname{card} I < \lambda$. *Dann ist auch $A/\bigwedge_{i\in I} t_i = s_i$ λ-präsentierbar.*

Beweis
$A/_{\bigwedge_{i\in I} t_i=s_i}$ ist nach 1.7 ein Coegalisator eines Diagramms $F_{\mathbf{A}}X \rightrightarrows A$ mit $X \in \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$ sodaß card $X < \lambda$. Nach Voraussetzung sind $F_{\mathbf{A}}1_s$ (für $s \in \mathcal{S}$) und A λ-präsentierbar. Da auch λ-kleine Colimiten von λ-präsentierbaren Objekten λ-präsentierbar sind [AR 1.16], folgt die Behauptung. $

2.4 Fakt
Sei $\mathbf{A}$ *eine Kategorie, sei* $(\ P \xrightarrow{m} Q\ ) \in \mathrm{Mor}\,\mathbf{A}$, *sodaß* P λ*-präsentierbar ist, und sei* $(\ A_i \xrightarrow{c_i} A\ )_{i\in I}$ *der Colimes eines* λ*-gerichteten Diagramms. Wenn* $\hom_{\mathbf{A}}(m, A_i)$ *für jedes* $i \in I$ *surjektiv ist, dann ist auch* $\hom_{\mathbf{A}}(m, A)$ *surjektiv.*

Beweis (vgl. den Beweis von [AR 1.35 Prop])
Für jeden Morphismus $f : P \to A$ existiert $i \in I$ und eine Faktorisierung $f = c_i \circ f'$ (weil P λ-präsentierbar ist), sowie $\bar{f} : Q \to A_i$ mit $f' = \bar{f} \circ m$ (weil $\hom_{\mathbf{A}}(m, A_i)$ surjektiv ist). Also gilt $f = c_i \circ \bar{f} \circ m$. $

2.5 Proposition (Orthogonal-Reflektions-Konstruktion)
Sei $\mathbf{A}$ *eine kovollständige Kategorie und* $\mathcal{M} \subseteq \mathrm{Mor}\,\mathbf{A}$ *eine Menge von Morphismen mit jeweils* λ*-präsentierbarem Domain und Codomain. Dann gibt es für jedes Objekt* $A \in \mathbf{A}$ *eine Limeszahl* $i_* \in \mathbf{Ord}$ *und eine Kette* $(\ B_i \xrightarrow{b_{i,i+1}} B_{i+1}\ )_{i<i_*}$ *von Morphismen mit*

- $B_0 = A$
- $B_i \xrightarrow{b_{i,i+1}} B_{i+1}$ *ist für* $i < i_*$ *entweder definiert durch*
  - *einem Pushout* $\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{m} & M' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow \\ B_i & \xrightarrow[b_{i,i+1}]{} & B_{i+1} \end{array}$ *einer "Spanne"* $B_i \xleftarrow{f} M \xrightarrow{m} M'$ *mit* $m \in \mathcal{M}$, *oder durch*
  - *einen Coegalistor* $M' \underset{q}{\overset{p}{\rightrightarrows}} B_i \xrightarrow{b_{i,i+1}} B_{i+1}$ *eines Paares* (p, q), *für das* $(\ M \xrightarrow{m} M'\ ) \in \mathcal{M}$ *existiert mit* $p \circ m = q \circ m$.
- $(\ B_i \xrightarrow{b_{i,j}} B_j\ )_{i<j}$ *ist für jede Limeszahl* $j \leq i_*$, *die Colimes-Senke zur Kette* $(\ B_i \xrightarrow{b_{i,i'}} B_{i'}\ )_{i,i'<j}$.
- *Die* b_{i,i_*} *sind für* $i < i_*$ $\mathcal{M}^{\perp}$*-Reflektionspfeile. Insbesondere haben wir also einen Reflektionspfeil* $A \xrightarrow{b_{0,i_*}} B_{i_*}$.

Somit ist die λ*-Orthogonalitätsklasse* $\mathcal{M}^{\perp}$ *reflektiv in* $\mathbf{A}$.

Beweis (vgl. [AR 1.37])

Definiere induktiv $X_{i,\alpha}$ und $X_{i,\alpha} \xrightarrow{x^i_{\alpha,\alpha'}} X_{i,\alpha'}$ für $i, \alpha, \alpha' \in \mathbf{Ord}$: Sei $X_{0,0} := A$, $x^0_{0,0} := id_A$. Für $i \in \mathbf{Ord}$ sei I_i die Menge der

- Spannen $X_{i,0} \xleftarrow{f} M \xrightarrow{m} M'$ mit $m \in \mathcal{M}$ und
- Paare $M' \underset{q}{\overset{p}{\rightrightarrows}} X_{i,0}$ für die $(M \xrightarrow{m} M') \in \mathcal{M}$ existiert mit $p \circ m = q \circ m$

mit einer Wohlordnung. Ohne Einschränkung hat I_i kein größtes Element: Ist $\alpha \in I_i$ größtes Element, füge (für $n \in \mathbb{N}$) $\alpha + n$ zu I_i hinzu, mit zugehörigem (trivialem) Paar $(id_{M'}, id_{M'})$ für ein (beliebiges) $m \in \mathcal{M} \neq \emptyset$ (ohne Einschränkung) mit $\operatorname{cod} m = M'$. (Dies ist nur eine kosmetische Bedingung.)

(a) Nachfolger-Ordinalzahlen: Für $\alpha \in I_i$ (mit $\alpha + 1 \in I_i$) sei $X_{i,\alpha+1}$ der Colimes (d.h. Pushout bzw. Coegalisator) des zu α gehörigen Diagrammes (Spanne oder Paar), das um $X_{i,0} \xrightarrow{x^i_{0,\alpha}} X_{i,\alpha}$ verlängert wurde:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{m} & M' \\ {\scriptstyle x^i_{0,\alpha}\circ h}\downarrow & & \downarrow \\ X_{i,\alpha} & \xrightarrow[x^i_{\alpha,\alpha+1}]{} & X_{i,\alpha+1} \end{array}$$

bzw.

$$M' \underset{x^i_{0,\alpha}\circ q}{\overset{x^i_{0,\alpha}\circ p}{\rightrightarrows}} X_{i,\alpha} \xrightarrow{x^i_{\alpha,\alpha+1}} X_{i,\alpha+1}$$

Außerdem sei, für $\alpha' \leq \alpha$, $x^i_{\alpha',\alpha+1} := x^i_{\alpha,\alpha+1} \circ x^i_{\alpha',\alpha}$.

(b) Limes-Ordinalzahlen: Für eine Limesordinalzahl $0 \neq \beta \in I_i$ sei $(X_{i,\alpha} \xrightarrow{x^i_{\alpha,\beta}} X_{i,\beta})_{\alpha<\beta}$ der Colimes der Kette $(X_{i,\alpha} \xrightarrow{x^i_{\alpha,\alpha+1}} X_{i,\alpha+1})_{\alpha<\beta}$.

Ferner sei, für $i \in \mathbf{Ord}$, $(X_{i,\alpha} \xrightarrow{x^{i,i+1}_\alpha} X_{i+1,0})_{\alpha\in I_i}$ der Colimes der Kette $(X_{i,\alpha} \xrightarrow{x^i_{\alpha,\alpha+1}} X_{i,\alpha+1})_{\alpha\in I_i}$ und für eine Limesordinalzahl l sei $(X_{i,0} \xrightarrow{x^{i,l}_0} X_{l,0})_{i\in\mathbf{Ord}}$ der Colimes der Kette $(X_{i,0} \xrightarrow{x^{i,i+1}_0} X_{i+1,0})_{i\in\mathbf{Ord}}$. Für alle $i < j \in \mathbf{Ord}$ gilt dann $(X_{i,0} \xrightarrow{x^{i,j}_0} X_{j,0}) = (X_i \xrightarrow{x_{i,j}} X_j)$ für die in [AR 1.37] definierten $x_{i,j}$. Nach [AR 1.37 Prop, 1.38] ist dann $A \xrightarrow{x_{0,0}} X_\lambda$ Reflektionspfeil. Sei $I := \bigcup_{k\leq\lambda} \{k\} \times I_k$ mit der lexicographischen Ordnung. Für $j = (i, \alpha) \in I$ schreibe $B_j := X_{i,\alpha}$, und die Morphismen der Kette nenne $B_i \xrightarrow{b_{i,j}} B_j$. Für geeignetes $i_* \in \mathbf{Ord}$ gilt dann

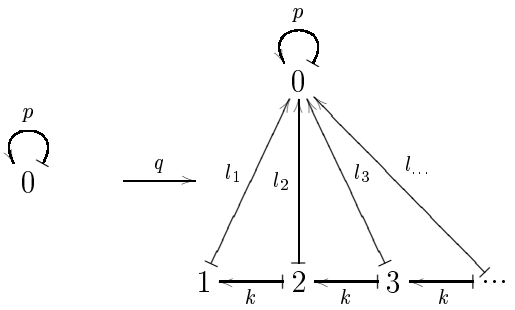
$B_{i_*} = X_{\lambda,0} = RA$. Für $i < i_*$ ist b_{i,i_*} Reflektionspfeil, da man B_i als Anfang der Reflektionskonstruktion auffassen kann. \$

2.6 Beispiel
Es existiert eine endlich-direktive reflektive Unterkategorie $\mathbf{C}$ *einer lokal endlich präsentierbaren Kategorie* $\mathbf{A}$*, sodaß* $\mathbf{C}$ *keine* $\aleph_0$*-Orthogonalitätsklasse in* $\mathbf{A}$ *ist.*

Beweis
Seien $\Sigma := \{k, p\} \cup \{l_n : n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ (unäre Operationen), $\mathbf{A} := \mathbf{Alg}\,\mathbf{\Sigma}$ und sei $\mathbf{C} := \mathcal{M}^{\perp}$ für $\mathcal{M} := \{q\} \cup \{q_n : n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ mit

$$q : F_{\mathbf{A}}1/_{p0=0} \to F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}/_{p0=0 \wedge \bigwedge\limits_{n>0} (l_n n=0 \wedge k(n+1)=n)}$$

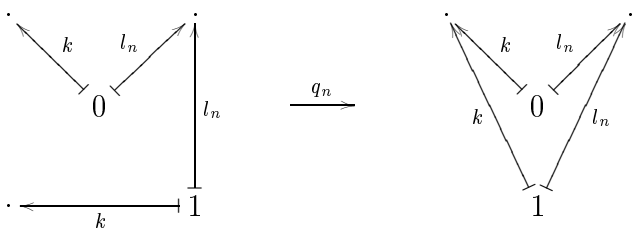
definiert durch $q0 = 0$ (ist wohldefiniert nach 1.20)



und

$$q_n : F_{\mathbf{A}}2/_{l_n 0=l_n 1} \to F_{\mathbf{A}}2/_{(l_n 0=l_n 1 \wedge k0=k1)}$$

definiert durch $q_n 0 = 0$ (für jedes $n > 0$)



(Bem.: Es ist nicht notwendig, $p0 = 0$ in $\operatorname{dom} q$ auszufaktorisieren, aber es vereinfacht den folgenden Beweis, denn:)
Wir bemerken, daß q Reflektionspfeil ist: Zunächst einmal kann man q als ersten Schritt in der Orthogonalitäts-Konstruktion 2.5 der Reflektion von $\operatorname{dom} q$ nach $\mathbf{C} = \mathcal{M}^{\perp}$ betrachten, denn es gilt $q \in \mathcal{M}$. Dann reicht es aber, zu zeigen, daß $\operatorname{cod} q \in \mathbf{C}$. Es gilt $\operatorname{cod} q \perp q$, da $\hom_{\mathbf{A}}(\operatorname{dom} q, \operatorname{cod} q) = \{q\}$ und q nur vermöge $id_{\operatorname{cod} q}$ durch q faktorisiert. Und es gilt (für jedes $n \in \mathbb{N}$) $\operatorname{cod} q \perp q_n$, da für $f \in$

$\hom_{\mathbf{A}}(\operatorname{dom} q_n, \operatorname{cod} q)$ gilt: $f(0) = f(1)$, weil notwendigerweise $l_n(f(0)) = l_n(f(1))$, und l_n in $\operatorname{cod} q$ nach 1.22 injektiv ist (da die totale Kongruenz von der partiellen als Unteralgebra erzeugt wird, siehe dort).
Ohne Einschränkung sei die Einschränkung $\tilde{q}|_{\mathbb{N}}$ des Quotienten

$$F_{\mathbf{A}}\mathbb{N} \xrightarrow{\tilde{q}} F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}/_{p0=0\wedge \bigwedge\limits_{n>0}(l_n n=0\wedge k(n+1)=n)}$$

die Inklusion (nach 1.22 ist sie injektiv).
$\mathbf{C}$ ist nach 2.5 reflektiv, da es eine $\aleph_1$-Orthogonalitätsklasse in $\mathbf{A}$ ist.
$\mathbf{C}$ ist endlich-direktiv:
Sei $(\ C_i \xrightarrow{c_i} A\ )_{i\in I}$ der $\mathbf{A}$-Colimes eines gerichteten Diagramms (mit Diagrammmorphismen $c_{ij} : C_i \to C_j$) in $\mathbf{C}$. Wir wollen $A \in \mathbf{C}$ zeigen. Wir haben $A \in \{q_n : n \in \mathbb{N}_{>0}\}^{\perp}$, weil λ-Orthogonalitätsklassen λ-direktiv sind [AR 1.35 Prop]. Damit bleibt zu zeigen, daß $\hom_{\mathbf{A}}(q, A)$ bijektiv ist (nach Definition der Orthogonalität). $\hom_{\mathbf{A}}(q, A)$ ist surjektiv nach 2.4 und injektiv wegen folgendem:
Seien $f, g : \operatorname{cod} q \to A$ gegeben mit $f \circ q = g \circ q$. Es reicht zu zeigen, daß $f(n) = g(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N} \subseteq F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}/_{\ldots} = \operatorname{cod} q$.
Für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ definiere

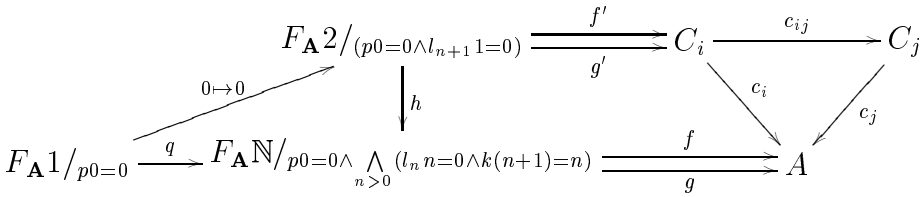
$$h : F_{\mathbf{A}}2/_{(p0=0\wedge l_{n+1}1=0)} \to F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}/_{p0=0\wedge \bigwedge\limits_{n>0}(l_n n=0\wedge k(n+1)=n)},$$

$$0 \mapsto 0, 1 \mapsto n+1.$$

Da $F_{\mathbf{A}}2/_{(p0=0\wedge l_{n+1}1=0)}$ endlich präsentierbar in $\mathbf{A}$ ist [AR 3.13 Cor], haben wir ein $i \in I$ und f', g' sodaß $c_i \circ f' = f \circ h$ und $c_i \circ g' = g \circ h$. Es gilt

$$c_i(f'(0)) = f(0) = f(q(0)) = g(q(0)) = c_i(g'(0))$$

(mithilfe des Morphismus $0 \mapsto 0$ in (2.1)) und $F_{\mathbf{A}}1/_{p0=0}$ ist endlich präsentierbar in $\mathbf{A}$, also existiert $i < j \in I$, sodaß $c_{ij}(f'(0)) = c_{ij}(g'(0))$.



(2.1)

Dann gilt

$$l_{n+1}(c_{ij}(f'(1))) = c_{ij}(f'(l_{n+1}(1))) = c_{ij}(f'(0)) = c_{ij}(g'(0)) = l_{n+1}(c_{ij}(g'(1))).$$

Wegen $C_j \perp q_{n+1}$ folgt $k(c_{ij}(f'(1))) = k(c_{ij}(g'(1)))$, also

$$\begin{aligned} f(n) &= f(k(n+1)) = k(f(n+1)) = k(f(h(1))) \overset{(2.1)}{=} k(c_j(c_{ij}(f'(1)))) \\ &= c_j(k(c_{ij}(f'(1)))) = c_j(k(c_{ij}(g'(1)))) = g(n) \end{aligned}$$

(wobei sich die letzte Gleichung analog zu den vorhergehenden ergibt).
$\mathbf{C}$ ist keine $\aleph_0$-Orthogonalitätsklasse in $\mathbf{A}$:
Angenommen es gilt $\mathbf{C} = \mathcal{M}'^{\perp}$ für eine Menge $\mathcal{M}' \subseteq \mathrm{Mor}\,\mathbf{A}$ sodaß $\mathrm{dom}\, m$ und $\mathrm{cod}\, m$ für jedes $m \in \mathcal{M}'$ $\mathbf{A}$-endlich-präsentierbar sind. Konstruiere die orthogonale Reflektion wie in 2.5 mit $B_0 := (F_{\mathbf{A}} 1/_{p0=0})_{\mathbf{A}}$ und $B_{i_*} = (F_{\mathbf{C}} 1/_{p0=0})_{\mathbf{C}}$. Sei $i \in \mathbf{Ord}$ minimal, sodaß für $1 \in (F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}/...)_{\mathbf{A}} = B_{i_*}$ gilt: $1 \in b_{i,i_*}[B_i]$ (sei etwa $1 = b_{i,i_*}(e)$ für $e \in B_i$). Dann gilt $i > 0$, da q der Reflektionspfeil zu B_0 ist und $1 \notin q[(F_{\mathbf{A}} 1/_{p0=0})_{\mathbf{A}}]$. Da die (konkreten) Colimessenken in $\mathbf{Alg}\,\mathbf{\Sigma}$ überdeckend sind, gehört i zu einer Spanne

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad m \quad} & M' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ B_{i-1} & \xrightarrow[b_{i-1,i}]{} & B_i \\ & {\scriptstyle b_{i-1,i_*}}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle b_{i,i_*}} & \\ & B_{i_*} & \end{array} \tag{2.2}$$

(wenn es zu einem Paar oder einer Kette gehören würde, wäre i nach vorausgehender Bemerkung nicht minimal). Da $(f', b_{i-1,i})$ überdeckend ist, gilt $e \in f'[M']$ (denn $e \in b_{i-1,i}[B_{i-1}]$ widerspräche der Minimalität von i). Somit existiert $n_0 := \max(\mathbb{N} \cap b_{i,i_*} \circ f'[M']$ (für $\mathbb{N} \subseteq (F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}/...)_{\mathbf{A}}$), denn die betrachtete Menge ist nicht-leer, und außerdem ist sie endlich: Nach Voraussetzung an $\mathcal{M}$ ist M' $\mathbf{A}$-endlich präsentierbar, wird also von einer endlichen Menge X erzeugt [AR 3.12]. Wäre $\mathbb{N} \cap b_{i,i_*} \circ f'[M']$ nun unendlich (also cofinal im $(F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}/...)_{\mathbf{A}}$ erzeugenden $\mathbb{N}$), so würde das endliche $b_{i,i_*} \circ f'[X]$ das nicht endlich erzeugte $(F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}/...)_{\mathbf{A}}$ erzeugen, da für $n \leq n' \in \mathbb{N} \subseteq (F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}/...)_{\mathbf{A}}$ gilt: $k^{n'-n}(n') = n$. Sei $x \in M'$ sodaß $b_{i,i_*} \circ f'(x) = n_0$.
Betrachten wir nun das folgende $\mathbf{A}$-Pushout P:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad m \quad} & M' \\ {\scriptstyle b_{i-1,i_*} \circ f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{f}} \\ B_{i_*} & \xrightarrow[\bar{m}]{} & P \\ & {\scriptstyle id_{B_{i_*}}}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle r_P} & \\ & B_{i_*} & \end{array} \tag{2.3}$$

Es gilt $r_P \circ \bar{m} = id_{B_{i_*}}$ nach der Orthogonal-Reflektionskonstruktion (siehe 2.5): Da $\mathbf{C} = \mathcal{M}'^{\perp}$ nach Annahme, können wir P als ersten Schritt in der Konstruktion der Reflektion B_{i_*} von B_{i_*} auffassen (wegen 1.4(1)).
Nun gilt $\bar{m}(n_0) \neq \bar{f}(x)$: Sonst würde wegen 1.24 $n_0 \in b_{i-1,i_*} \circ f[M]$ folgen und damit (wegen $k^{n_0}(n_0) = 1$) $1 \in b_{i-1,i_*}[B_{i-1}]$ (denn b_{i-1,i_*} ist Homomorphismus

und es gilt $f[M] \subseteq B_{i-1}$) im Widerspruch zur Minimalität von i.
Ferner gilt für jeden Term $\vec{t}$: $\bar{f}(x) \notin \vec{t} \circ k[P]$: $(\bar{m}, \bar{f})$ ist überdeckend und es gilt $\bar{f}(x) \notin \vec{t} \circ k[\bar{m}[B_{i_*}]]$ nach dem vorhergehenden Argument, also bleibt zu zeigen, daß $\bar{f}(x) \notin \vec{t} \circ k[\bar{f}[M']]$. Zunächst gilt

$$r_P \circ \bar{f} \circ m \overset{(2.3)}{=} id_{B_{i_*}} \circ b_{i-1,i_*} \circ f \overset{(2.2)}{=} b_{i,i_*} \circ f' \circ m,$$

also wegen $B_{i_*} \perp m$ (nach Annahme) $r_P \circ \bar{f} = b_{i,i_*} \circ f'$. Somit hätte $\bar{f}(x) \in \vec{t} \circ k[\bar{f}[M']]$ zur Folge: $n_0 = b_{i,i_*} \circ f'(x) = r_P \circ \bar{f}(x) \in \vec{t} \circ k[b_{i,i_*} \circ f'[M']]$ (die Homomorphismen kommutieren mit $\vec{t}, k$), d.h. $n_0 = \vec{t} \circ k(y)$ für ein $y \in b_{i,i_*} \circ f'[M']$. Wegen Injektivität von k, p und (für alle n) l_n auf $\operatorname{cod} q$ (siehe 1.22) folgt daraus $y \in \mathbb{N}_{>n_0}$, im Widerspruch zur Minimalität von n_0.
Nun können wir mit untenstehendem Lemma folgern, daß $n_0 = b_{i,i_*}(f'(x)) = r_P(\bar{f}(x)) \neq r_P(\bar{m}(n_0)) = n_0$, damit haben wir unseren ersehnten Widerspruch.

2.6.α Lemma
Sei $x \in A \in \mathrm{Ob}\mathbf{A}$. Wenn für jeden Term $\vec{t}$ gilt $x \notin \vec{t} \circ k[A]$, dann gilt für jedes $y \in A$:

$$r_A(x) = r_A(y) \Rightarrow x = y.$$

Beweis
Die Reflektion $B_{i_*} := RA$ von $B_0 := A$ wird per iterierter Bildung in $\mathbf{A}$ von Pushouts von "Spannen", Coegalisatoren von "Paaren" und gerichteten Colimiten konstruiert (siehe 2.5, auch für die folgenden Notationen). Wir beweisen die obige Aussage induktiv für jeden dieser möglichen Konstruktionsschritte (beachte, daß jede streng monoton abnehmende Folge in i_* wegen der Wohlordnung der Ordinalzahl i_* nur endliche viele Glieder hat).

(a) Pushouts von "Spannen": Sei $A = B_i$ und $\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{m} & M' \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h'} \\ B_i & \xrightarrow[b_{i,i+1}]{} & B_{i+1} \end{array}$ das Pushout zu einer Spanne $B_i \xleftarrow{h} M \xrightarrow{m} M'$ mit $m \in \mathcal{M}$. Sei $x \in A$, sodaß für jeden Term $\vec{t}$ gilt $x \notin \vec{t} \circ k[A]$, und $b_{i,i+1}(x) = b_{i,i+1}(y)$ für ein $y \in A$. Zu zeigen ist $x = y$.

1. Fall: $m = q$: q ist injektiv, Colimiten sind konkret in $\mathbf{Alg}\,\boldsymbol{\Sigma}$ (Σ unär, [AHS 13.13(1)]) und Monos sind in **Set** pushoutstabil [AHS 11Pa]. Daher ist $b_{i,i+1}$ injektiv, und somit gilt $x = y$.

2. Fall: $m = q_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$: Nach der Konstruktion eines Pushouts (vergleiche den Beweis von 1.24) gilt $b_{i,i+1}(x) = b_{i,i+1}(y)$ gdw. $x = y$ oder es existieren $j \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $x_1, ..., x_j \in \operatorname{dom} q_n$ sodaß gilt

$$x = h(x_1) \wedge q_n(x_1) = q_n(x_2) \wedge h(x_2) = h(x_3) \wedge ... \wedge h(x_j) = y.$$

Angenommen $x \neq y$. Ohne Einschränkung sind die x_ν paarweise verschieden: gilt etwa $x_\nu = x_\mu$ für $\mu > \nu$, dann kann man $x_\nu, ..., x_\mu$ aus der Liste entfernen. $q_n(x_1) = q_n(x_2)$ für $x_1 \neq x_2$ impliziert aber $x_1 = \vec{t}(k(o))$ für einen Term $\vec{t}$ und $o \in \{0, 1\}$. Dann gilt jedoch auch $x = h(x_1) \in \vec{t} \circ k[B_i]$ (da h Homomorphismus ist), im Widerspruch zur obigen Annahme. Daher muß $x = y$ gelten.

(b) Coegalisator von "Paaren": Sei $A = B_i$ und $M' \underset{h_1}{\overset{h_0}{\rightrightarrows}} B_i \xrightarrow{b_{i,i+1}} B_{i+1}$ der $\mathbf{A}$-Coegalisator zu einem Paar (h_0, h_1) mit $h_0 \circ m = h_1 \circ m$ für ein $(\ M \xrightarrow{m} M'\ ) \in \mathcal{M}$. Sei $x \in A$, sodaß für jeden Term $\vec{t}$ gilt $x \notin \vec{t} \circ k[A]$, und $b_{i,i+1}(x) = b_{i,i+1}(y)$ für ein $y \in A$. Zu zeigen ist $x = y$.

1. Fall: $m = q$: Nach Konstruktion des (konkreten) Coegalisators (s. [AHS 7.69(1)]) gilt $b_{i,i+1}(x) = b_{i,i+1}(y)$ gdw. $x = y$ oder es existieren $j \in \mathbb{N}_{\geq 1}, x_1, ..., x_j \in \operatorname{dom} q$ und $\nu_1, ...\nu_j \in \{0, 1\}$ sodaß

$$x = h_{\nu_1}(x_1) \wedge h_{\neg\nu_1}(x_1) = h_{\nu_2}(x_2) \wedge ... \wedge h_{\neg\nu_j}(x_j) = y$$

(wobei $\neg 0 := 1, \neg 1 := 0$). Der letztere Fall ist aber nicht möglich, da nach Konstruktion für jedes $z \in \operatorname{cod} q$ ein Term $\vec{t}$ und $z' \in \operatorname{cod} q$ existieren mit $\vec{t} \circ k(z') = z$ (weil $\mathbb{N} = k[\mathbb{N}_{\geq 1}]$ den $\operatorname{cod} q$ erzeugt), insbesondere für $z := x_1$, also würde dann $x = h_{\nu_1}(\vec{t}(k(x_1'))) = \vec{t}(k(h_{\nu_1}(x_1)))$ gelten (h ist Homomorphismus), im Widerspruch zur Voraussetzung. Somit muß $x = y$ gelten.

2. Fall: $m = q_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$: Dieser Fall ist klar, da q_n Epi ist (somit $h_1 = h_2$ und $b_{i,i+1}$ ein Iso). ($)

(c) Gerichtete Colimiten: Sei $A = B_i$ und $(\ B_j \xrightarrow{b_{j,\alpha}} B_\alpha\ )_{j<\alpha}$ Colimes des gerichteten Diagramms $(\ B_j \xrightarrow{b_{j,j'}} B_{j'}\ )_{j<\alpha}$. Sei $x \in A$, sodaß

für jeden Term $\vec{t}$ gilt $x \notin \vec{t} \circ k[A]$ und $b_{i,\alpha}(x) = b_{i,\alpha}(y)$. Zu zeigen ist, daß ein $j < \alpha$ mit $i < j$ existiert, sodaß $b_{i,j}(x) = b_{i,j}(y)$. Dies folgt aber daraus, daß $F_{\mathbf{A}}1$ endlich präsentierbar ist [AR 3.4(5)]: definiere $h_1, h_2 : F_{\mathbf{A}}1 \to B_i$ durch $h_1(0) = x, h_2(0) = y$; das j ergibt sich aus der Eindeutigkeitsbedingung in der Definition eines präsentierbaren Objektes, die besagt, daß es ein j gibt, sodaß $b_{i,j} \circ h_1 = b_{i,j} \circ h_2$ gilt.

2.7 Bemerkung Nach Auskunft von Prof. Adámek und Prof. Rosický, die ich erhielt, als in ihnen dieses Gegenbeispiel auf dem "International Symposium on Applications of Categorical Methods" (Antwerpen 23.-27.3.1998) vorstellte, wurden sie vor kurzem von M. Hébert darauf aufmerksam gemacht, daß man aus [Vol79] ebenfalls ableiten kann, daß ihre Charakterisierung von λ-Orthogonalitätsklassen in lokal λ-präsentierbaren Kategorien nicht korrekt ist.

2.8 Beobachtung

(1) Die Tatsache, daß **C** im obigen Beweis keine $\aleph_0$-Orthogonalitätsklasse ist, folgt ebenfalls aus 4.16 und dem Beweis von 4.23 (siehe 4.24(1)).

(2) Obiges **C** ist nicht einmal eine Orthogonalitätsklasse zu einer Menge von Morphismen mit endlichen erzeugten (oder äquivalent mit endlich erzeugbaren [AR 3.11]) Domains (im obigen Beweis wird von den Domains der Morphismen in $\mathcal{M}'$ nur die Endlich-Erzeugtheit [AR 3.11]) verwendet).

(3) Die Implikation $ii \Rightarrow i$ in [AR 1.39] ist mit 2.6 widerlegt. Es gilt jedoch weiterhin:

2.9 Fakt
Jede λ-direktive reflektive Unterkategorie **C** *einer lokal λ-präsentierbaren Kategorie* **A** *ist lokal λ-präsentierbar.*

Beweis (siehe AR 1.39 Proof)
Die Reflektionen der **A**-λ-präsentierbaren Objekte bilden eine (im wesentlichen kleine) Klasse von **C**-λ-präsentierbaren Objekten, und jedes Objekt in **C** ist λ-gerichteter Colimes dieser Reflektionen. $

2.10 Fakt
Die lokal λ-präsentierbaren Kategorien sind genau die λ-orthogonalen Unterkategorien von λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$.

Beweis

$\Rightarrow$: [AR 1.46, 3.5(3)] und: Sind $\mathbf{C} \overset{E_1}{\hookrightarrow} \mathbf{B}$ und $\mathbf{B} \overset{E_2}{\hookrightarrow} \mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ Einbettungen λ-orthogonaler Unterkategorien, so auch $E_2 \circ E_1$.

$\Leftarrow$: Siehe 2.9. \$

2.2 Eigenschaften lokal präsentierbarer Kategorien

In diesem Abschnitt sind einige Eigenschaften lokal präsentierbarer Kategorien zusammengestellt, die die in [AR 1.D] gezeigten ergänzen und in den folgenden Kapiteln Anwendung finden.

2.11 Fakt

In einer Kategorie mit λ-erzeugbarem Generator gilt:

(1) *Für jede Monotransformation zwischen λ-gerichteten Mono-Diagrammen ist der zwischen den Colimiten faktorisierende Morphismus ein Monomorphismus [GU 6.7a].*

(2) *Somit ist für eine aus Monomorphismen bestehende Senke $\mathcal{S}$, die natürlich bzgl. eines λ-gerichteten Diagramms D ist, der faktorisierende Morphismus vom Colimes von D zu $\operatorname{cod}\mathcal{S}$ ein Monomorphismus (betrachte $\operatorname{cod}\mathcal{S}$ als Colimes des konstanten Diagramms mit Wert $\operatorname{cod}\mathcal{S}$) [GU 6.7b].*

(3) *Die Colimes-Senken zu λ-gerichteten Monodiagrammen bestehen aus Monos [GU 6.7c].*

(4) *Somit sind Colimes-Senken zu λ-gerichteten Monodiagrammen λ-gerichtete Vereinigungen (denn Colimes-Senken sind extremale Epi-Senken).*

\$

2.12 Bemerkung

Für ein Gegenbeispiel zu 2.11(3) in Kategorien von Algebren ohne λ-erzeugbaren Generator, s. 3.6.

2.13 Fakt

In einer Kategorie mit einem λ-erzeugbaren Generator und Colimiten von λ-gerichteten Mono-Diagrammen sind λ-gerichtete Vereinigungen λ-gerichtete Colimiten [AR 1.63] (und somit für ein gegebenes Mono-Diagramm eindeutig bis auf einen Isomorphismus). \$

2.14 Bemerkung
Für ein Gegenbeispiel zu 2.13 in Kategorien von Algebren ohne λ-erzeugbaren Generator, s. 3.7.

2.15 Fakt
In einer lokal λ-erzeugbaren Kategorie gilt:

(1) *λ-kleine Limiten kommutieren mit Colimiten von λ-gerichteten Mono-diagrammen [GU 9.2].*

(2) *Für jedes Objekt ist die Senke der Inklusionen seiner λ-erzeugbaren Unterobjekte eine Colimes-Senke (zu dem λ-gerichteten Mono-Diagramm der λ-erzeugbaren Unterobjekte) [GU 9.5].* \$

2.16 Bemerkung
2.15(2) gilt im allgemeinen nicht für reflektive Unterkategorien von λ-ären $\mathbf{Alg}\,\mathbf{\Sigma}$ (das folgt aus 4.4, $7 \overset{\pi}{\not\Rightarrow} 5$).
Außerdem gilt es im allgemeinen nicht in λ-orthogonalen Unterkategorien von λ-ären $\mathbf{Alg}\,\mathbf{\Sigma}$, wenn man "$\lambda$-erzeugbar" durch "$\lambda$-erzeugt" ersetzt: Betrachte das Objekt A in 4.15(3): keine Unteralgebra, die 0 enthält, ist endlich erzeugt.

2.17 Proposition
In einer lokal λ-präsentierbaren Kategorie gilt:

(1) *Für jede Monotransformation zwischen λ-gerichteten Diagrammen ist der zwischen den Colimiten faktorisierende Morphismus ein Mono.*

(2) *λ-kleine Limiten kommutieren mit λ-gerichteten Colimiten.*

Beweis

(1) [GU 6.6a]

(2) [GU 7.12] oder:
Nach [AR 1.46 i⇒iii] und [AHS 12O] genügt es, dies für die Kategorie **Set** zu zeigen. Dies geht elementar ([ML p211 Th1] oder [AR 1.59]), oder wie folgt [Hof]: Wir wollen zeigen, daß für jede Kategorie $\mathbf{I}$ mit weniger als λ Morphismen der Funktor (s. [ML p110 Ex3]) $\mathbf{Set}^{\mathbf{I}} \xrightarrow{\lim} \mathbf{Set}$ λ-gerichtete Colimiten bewahrt. Es gilt $\lim \cong \hom_{\mathbf{Set}^{\mathbf{I}}}(\mathrm{const}_1, _)$ [ML p106 Th1], also reicht es zu zeigen, daß const_1 λ-präsentierbar ist. Dies gilt nach 2.19 oder wegen 2.18 und weil ein λ-kleiner Colimes der endlich präsentierbaren Hom-Funktoren λ-präsentierbar ist. \$

2.18 Fakt
Für kleines $\mathbf{I}$ ist der Colimes der Yoneda-Einbettung $\mathbf{I} \xrightarrow{E} \mathbf{Set}^{\mathbf{I}^{\mathrm{op}}}$ const_1.

Beweis
Colimiten werden in $\mathbf{Set}^{\mathbf{I}^{\mathrm{op}}}$ punktweise gebildet [AHS 12O]. Somit ist zu zeigen, daß für jedes $A \in \mathbf{I}$ $\hom_{\mathbf{I}}(A, _) \circ E$ den Colimes 1 hat. Benutzen wir die Coprodukt/Coegalisator-Konstruktion des Colimes [AHS 12.3], so reicht es zu bemerken, daß für $A_0, A_1 \in \mathbf{I}$ und $f_j \in \hom_{\mathbf{I}}(A, A_j)$ $(j \in 2)$ gilt: $(E(f_j))(id_A) = f_j$ $(j \in 2)$. (denn deshalb werden f_0 und f_1 vom Coegalisator identifiziert). \$

2.19 Fakt
Sei $\operatorname{card} \operatorname{Mor} \mathbf{I} < \lambda$ *und sei* $A \in \mathbf{A}$ λ*-präsentierbar. Dann ist* const_A λ*-präsentierbar in* $\mathbf{A}^{\mathbf{I}}$. \$

2.20 Fakt
Jede lokal präsentierbare Kategorie ist eine (ExtrEpi, MonoQuelle)-Kategorie.

Beweis
Dies gilt wegen [AHS 15.25] und [AR 1.58]. \$

Kapitel 3

Kategorien von Algebren

3.1 Fakten in Kategorien von Algebren

Dieser Abschnitt enthält einige Fakten in Kategorien von Algebren, die im folgenden verwendet werden. Der Vollständigkeit halber werden sie auch durch Fakten ergänzt, die in den folgenden Abschnitten keine Anwendung finden (und von denen einige durch Vorgriff auf Ergebnisse des nächsten Kapitels gezeigt werden). Außerdem wird eine Hierarchie von Unterkategorien eines $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ *vorgestellt, relativ zu der anschließend Aussagen über Colimes-Senken, Vereinigungen etc. in Kategorien von Algebren (und im nächsten Kapitel über Kleinheitsbedingungen an Objekte) getroffen werden, wobei jeweils die schwächstmögliche Bedingung an die Kategorie angegeben wird, unter der die jeweilige Aussage wahr ist.*
Obwohl Vopěnka's Prinzip (das besagt, daß keine lokal präsentierbare Kategorie eine große diskrete volle Unterkategorie besitzt) hier nicht zugrunde gelegt wird, wird im folgenden Kapitel mehrfach darauf Bezug genommen, da die Gültigkeit einer Aussage unter dem Prinzip deutlich macht, daß man kein Gegenbeispiel (auch ohne angenommene Gültigkeit des Prinzips) ohne Bezugnahme auf große Kardinalzahlen konstruieren kann [AR p241f].

3.1 Bemerkung
Im folgenden nutzen wir wiederholt aus, daß sich viele der zitierten Definitionen und Aussagen, die sich auf Kategorien einsortiger Algebren beziehen, auf mehrsortige Algebren übertragen lassen (präzise gemacht wurde diese Beobachtung (im endlichen Fall) in [Ga]).
Interessant ist in diesem Zusammenhang auch, daß als Gegenbeispiele zu den

jeweils untersuchten Aussagen stets einsortige Algebren, und bis auf 4.8: a $\overset{A}{\not\Rightarrow} 2$ (notwendigerweise, siehe dort) jeweils mit $\lambda = \aleph_0$ gefunden wurde (in den meisten Fällen sogar unäre Algebren).

3.2 Definition
Eine Unterkategorie $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ heißt **Varietät**, wenn sie durch eine Klasse von Gleichungen definiert wird [AHS 16.16]. Eine Varietät heißt **λ-är**, wenn das zugehörige $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ λ-är ist [AR p159].
$\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ heißt **Quasivarietät**, wenn sie durch eine Klasse von Implikationen definiert wird [AHS 16.12]. Eine Quasivarietät heißt **λ-Quasivarietät**, wenn das zugehörige $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ λ-är ist und **λ-äre Quasivarietät**, wenn zusätzlich die Implikationen jeweils weniger als λ Prämissen haben [AR p161].

3.3 Bemerkung

- Jede λ-äre Quasivarietät ist lokal λ-präsentierbar (dies folgt aus 2.10 und 3.4).
- Da τ per Definition eine Menge ist (s.1.15) ist jede Varietät λ-är und jede Quasivarietät eine λ-Quasivarietät für ein geeignetes λ. Zu einer Quasivarietät, die durch eine Menge von Implikationen definiert ist, existiert natürlich ein λ, sodaß sie eine λ-äre Quasivarietät ist.
- Umgekehrt können wir bei einer λ-ären Quasivarietät (für ein beliebiges λ, also insbesondere bei einer Varietät) ohne Einschränkung annehmen, daß sie durch eine Menge von Implikationen (bzw. Gleichungen) definiert wird (somit stimmt die Definition mit der in [AR p161] (bzw. [AR p138/159]) überein): Denn eine Implikation mit weniger als λ Prämissen entspricht einem regulären Epi in $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ mit einem λ-präsentierbaren Domain (cf. [AHS 16.11]), da eine Gleichung im λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ weniger als λ Variablen verwendet (wegen 1.3, denn Terme involvieren per Definition nur endliche Kompositionen von Operationen). Davon gibt es im wesentlichen aber nur eine Menge: Ein λ-äres $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ ist lokal λ-präsentierbar [AR 3.4(6)] (und hat somit im wesentlichen nur eine Menge von λ-präsentierbaren Objekten [AR 1.19(2)]) und ist co-wellpowered [AR 1.58].
- Die Aussage "jede $\aleph_0$-Quasivarietät ist λ-är für ein geeignetes λ" ist äquivalent zu Vopěnka's Prinzip [AR 6.15].
- Demgegenüber kann man leicht eine implikationsdefinierte Unterkategorie $\mathbf{C}$ der Kategorie $\mathbf{A}$ der Σ-Algebren für ein geeignetes unbeschränktes Σ (d.h. Σ ist eine Klasse) angeben, für die kein λ existiert, sodaß $\mathbf{C}$ durch

Implikationen mit jeweils weniger als λ Prämissen definierbar ist (oder äquivalent dazu, die nicht durch eine Menge von Implikationen definierbar ist): Sei $\Sigma := \{{p^\lambda}_\alpha : \alpha < \lambda \text{ reguläre Kardinalzahl}\}$ (unäre Operationen), $\mathbf{C}$ die durch die Implikationen $\bigwedge_{\alpha<\lambda} {p^\lambda}_\alpha(a) = {p^\lambda}_\alpha(b) \Rightarrow a = b$ (für jedes λ) definierte Unterkategorie. Für jedes λ gilt nun: Wäre $\mathbf{C}$ definierbar durch Implikationen mit je weniger als λ Prämissen, so wäre es auch λ-direktiv in $\mathbf{A}$ (hierfür braucht man nicht die Beschränktheit von Σ - wir bemerken jedoch, daß $\mathbf{A}$ natürlich auch keine konkreten λ-gerichteten Colimiten hat). Dies ist aber nicht der Fall: Das λ-gerichtete Diagramm in $\mathbf{C}$ bestehend aus $(F_{\mathbf{A}}\{x,y\}/_{\bigwedge_{\alpha<\beta} {p^\lambda}_\alpha(x)={p^\lambda}_\alpha(y)})_{\mathbf{A}}$ (für alle $\beta < \lambda$) und den Quotientenmorphismen hat als $\mathbf{A}$-Colimes $(F_{\mathbf{A}}\{x,y\}/_{\bigwedge_{0<\alpha<\lambda} {p^\lambda}_\alpha(x)={p^\lambda}_\alpha(y)})_{\mathbf{A}} \notin \mathbf{C}$.

In der folgenden Notiz geben wir eine Hierarchie von Unterkategorien von $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ für λ-äres τ an. Dabei bedeutet $a \to b$, daß eine Unterkategorie mit Eigenschaft a auch die Eigenschaft b besitzt (bezüglich derselben Oberkategorie $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ und mittels derselben Einbettung !). Weitere Implikationen als die (reflektive und transitive Hülle der) angegebenen gelten im allgemeinen nicht.
Außerdem bedeuten:

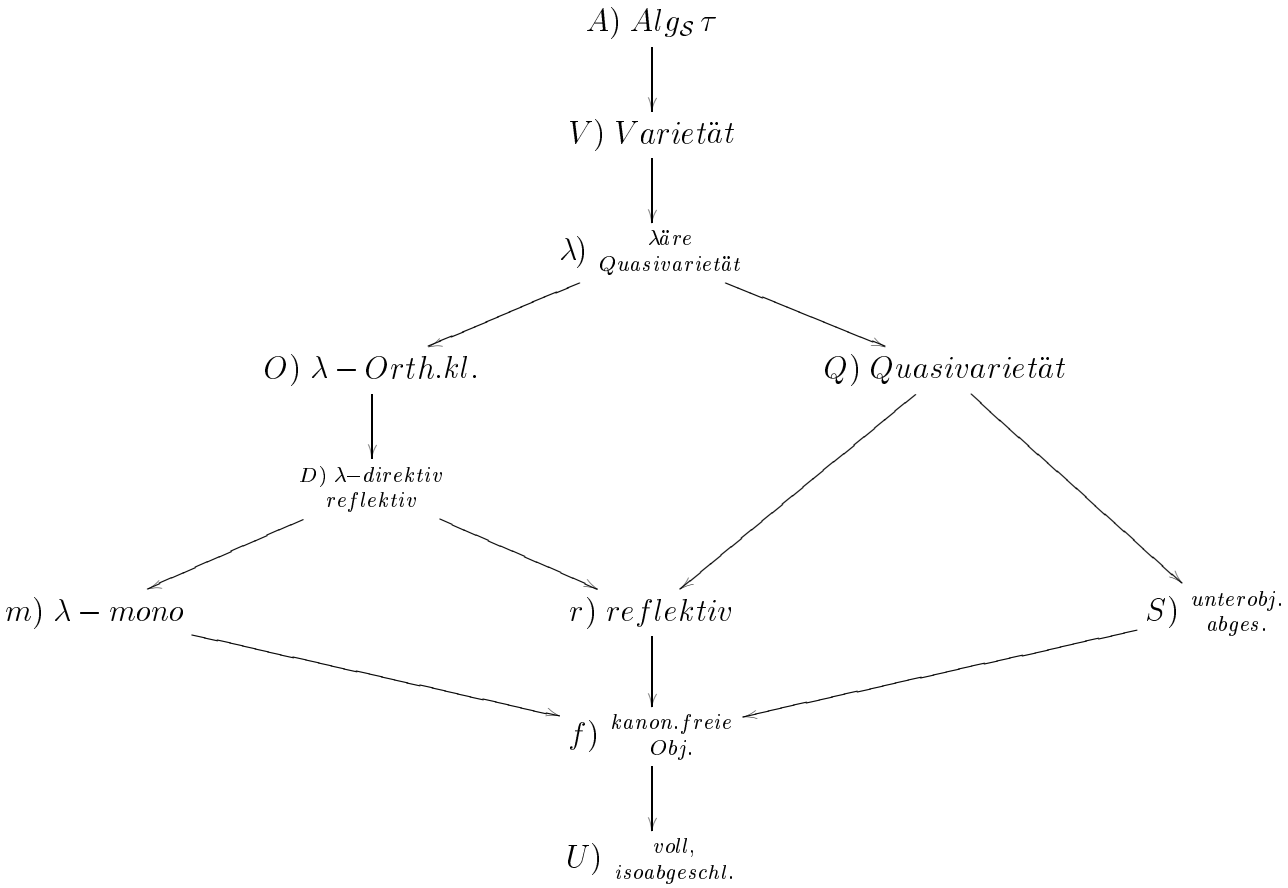
λ-mono : Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten, abgeschlossen unter Colimiten von λ-gerichteten Monodiagrammen (vgl. 1.10(1))

kanon. freie Obj. : Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten

unterobj.abg. : Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten, die abgeschlossen unter Unterobjekten ist

3.4 Notiz

Es gilt folgende Hierarchie von Unterkategorien von $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ *für* λ*-äres* τ*:*



Außerdem ist eine λ*-direktive Quasivarietät* λ*-är, eine reflektive Unterkategorie abgeschlossen unter Unterobjekten ist eine Quasivarietät, eine Unterkategorie mit Coegalisatoren und kanonischen freien Objekten ist reflektiv und eine* λ*-direktive und limesabgeschlossene Unterkategorie ist ebenfalls reflektiv.*

Beweis

(1) λ-Orthogonalitätsklassen sind reflektiv und λ-direktiv (siehe 2.5 und [AR 1.35 Prop]).

(2) Für ein Bespiel einer reflektiven und λ-direktiven Unterkategorie, die keine λ-Orthogonalitätsklasse ist, siehe 2.6.

(3) Eine Quasivarietät ist reflektiv wegen [AHS 16.14] ($\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ ist (RegularEpi,MonoQuellen)-Kategorie, siehe [AR 3.4(2)]).

(4) Eine Quasivarietät ist Unterobjekt-abgeschlossen [AHS 16.8].

(5) Eine λ-äre Quasivarietät braucht keine Varietät zu sein braucht: **TfAb** ist eine finitäre Quasivarietät [AR 3.20(2)], aber keine Varietät: Für

$C := \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : a - b \in 2\mathbb{Z}\}, \mathbb{Z} \in \mathbf{TfAb}$ haben wir in **Set** den Coegalisator $C \underset{q}{\overset{p}{\rightrightarrows}} \mathbb{Z} \xrightarrow{c} \mathbb{Z}_2$ der Kongruenzrelation (p,q) von c. Nun ist $\mathbb{Z}_2$ aber nicht unterliegende Menge eines $A \in \mathbf{TfAb}$, also kreiert U nicht Coegalisatoren von Kongruenzrelationen, somit kann **TfAb** keine (notwendigerweise finitäre) Varietät sein (wegen [AHS 20.20,20.35]).

(6) Ein Beispiel einer nicht Unterobjekt-abgeschlossenen λ-Orthogonalitätsklasse ist: In $\mathbf{A}$:=$\mathbf{Alg}\,\mathbf{\Sigma}$ mit $\Sigma = \{p\}$ (unär) ist $\{m\}^\perp$ mit $F_{\mathbf{A}}1 \xrightarrow{m} F_{\mathbf{A}}1/_{p0=0}$ (d.h. die $\mathbf{A}$-Algebren mit genau einem p-Fixpunkt) nicht Unterobjekt-abgeschlossen in $\mathbf{A}$.

(7) Folgende Quasivarietät ist nicht abgeschlossen unter Colimiten λ-gerichteter Mono-Diagramme (s. [H71 p282]): **pAb** ist Quasivarietät nach Definition (SP-Hülle der endlichen abelschen Gruppen in **Ab**, und somit in **Alg{+,-,0}** wegen 1.10(1) und [AHS 13.27], benutze [AHS 16.19]), aber nicht abgeschlossen unter Colimiten von λ-gerichteten Monodiagrammen in **Ab** (und somit in **Alg{+,-,0}**, denn **Ab** ist abgeschlossen unter Colimiten von λ-gerichteten Monodiagrammen in **Alg{+,-,0}**): $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist in **Ab** Colimes des gerichteten Monodiagrammes (mit den gegenseitigen Inklusionen) seiner endlichen Untergruppen (denn $< 1/n >_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$ ist endlich für jedes $n \in \mathbb{N}$), aber gehört nicht zu **pAb**: Jedes homomorphe Bild von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ in **Ab** ist divisible, also ist das einzige endliche homomorphe Bild von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ die triviale Gruppe. Somit kann $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ nicht in ein Produkt endlicher abelscher Gruppen eingebettet werden, denn die Komposition dieser Einbettung mit einer jeden Projektion wäre dann trivial (und somit die Einbettung selbst). (Aus demselben Grund ist sogar (für jedes $C \in \mathbf{pAb}$) jeder $h \in \hom_{\mathbf{Ab}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, C)$ trivial, denn C ist einbettbar in ein Produkt endlicher abelscher Gruppen; also ist die Reflektion von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ trivial). (Bem.: Übrigens gilt $F_{\mathbf{pAb}}1 = \mathbb{Z}$, da das Element $(1,1,...) \in \prod_{n>0} \mathbb{Z}_n$ torsionsfrei ist, und somit eine Einbettung von $\mathbb{Z}$ ermöglicht.)

(8) Unterkategorien, die kanonische freie Objekte haben und abgeschlossen unter Colimiten λ-gerichteter Mono-Diagramme sind, brauchen nicht reflektiv zu sein: Sei $\lambda := \aleph_0$ und $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{Rng} \subseteq \mathbf{Alg}\{\cdot, +, -, \mathbf{0}\}$ die Unterkategorie der Integritätsringe. **C** hat kanonische freie Objekte, da die freien Ringe $\mathbb{Z}[X]$ [AHS 8.23(10)] Integritätsringe sind [H96]. **C** ist nach [AR 4.16] (man beachte, daß in [AR 4.7pf I] zu einem λ spezialisiert werden kann) abgeschlossen in **Rng** (und somit in $\mathbf{Alg}\{\cdot, +, -, \mathbf{0}\}$) unter Colimiten von gerichteten Mono-Diagrammen, weil definierbar in **Rng**

durch die Implikation $xy = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$ (mit endlich präsentierbarem (Co-)Domain). **C** ist aber nicht reflektiv in **Rng** (also nach 3.4.α und 1.13 auch nicht in $\mathbf{Alg}\{\cdot, +, -, \mathbf{0}\}$, denn dann hätte es Coegalisatoren), denn **C** ist nicht limesabgeschlossen (siehe [AHS 13.27] und 1.4(1)): $\mathbb{Z}^2$ ist wegen $(0,1) \cdot (1,0) = (0,0)$ kein Integritätsbereich.

(9) Eine Unterobjekt-abgeschlossene Unterkategorie braucht nicht reflektiv zu sein: **fAb** ist abgeschlossen unter Unterobjekten in **Ab** [H96] und somit im zugehörigen **Alg{0,-,+}**, aber nicht reflektiv in **Alg{0,-,+}**, denn sonst wäre es abgeschlossen unter Limiten in **Alg{0,-,+}** und somit in **Ab** aber $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ ist nicht frei [H96].

Alle anderen Implikationen des Diagramms oder Gegenbeispiele folgen direkt aus den obigen, oder aus den Definitionen. Weiterhin ist zu zeigen:

- Eine λ-direktive Quasivarietät ist λ-är: Nach [BH Prop1,Prop2] ist sie definierbar durch eine Klasse von Implikationen mit λ-kleinen Domains ($\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ ist λ-algebroidal, da λ-präsentierbar). Und in $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ folgt aus λ-klein λ-präsentiert (s.4.8), d.h. die Implikationen haben jeweils weniger als λ Prämissen [BH p150].

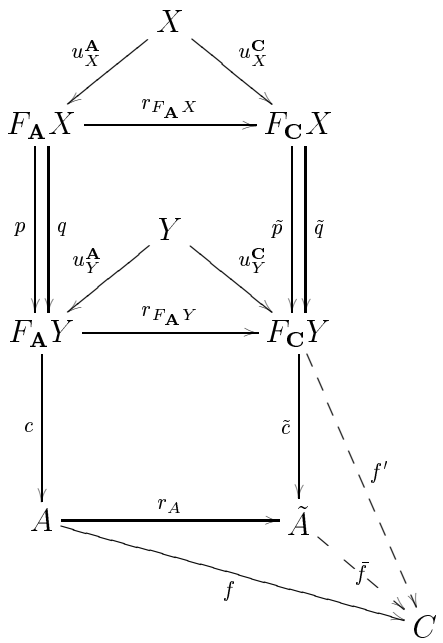
- Eine reflektive Unterkategorie abgeschlossen unter Unterobjekten ist eine Quasivarietät mittels [AHS 16.19].

- Eine Unterkategorie mit Coegalisatoren und kanonischen freien Objekten ist reflektiv nach dem Sandwich-Theorem: [Man p182] oder mit 1.19:

3.4.α Lemma (Fatfree Sandwich)
Sei **A** *eine über der Kategorie* **X** *konkrete Kategorie mit freien Objekten, die einen schwach regulären Generator bilden. Sei* $\mathbf{C} \xrightarrow{E} \mathbf{A}$ *Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten. Dann ist* **C** *genau dann reflektiv, wenn* **C** *Coegalisatoren hat.*

Beweis
$\Leftarrow$: Gegeben sei $A \in \mathbf{A}$, gesucht ist ein Reflektionspfeil $A \xrightarrow{r_A} \tilde{A}$. Nach Voraussetzung an **A** existieren $X, Y \in \mathbf{X}$ und ein **A**-Coegalisator $F_{\mathbf{A}}X \underset{q}{\overset{p}{\rightrightarrows}} F_{\mathbf{A}}Y \xrightarrow{c} A$. Sei $F_{\mathbf{A}}X \xrightarrow{r_{F_{\mathbf{A}}X}} F_{\mathbf{C}}X$ die $U_{\mathbf{A}}$-Fortsetzung des $U_{\mathbf{C}}$-universellen $u^{\mathbf{C}}_X$ (und analog für Y). Sei $F_{\mathbf{C}}X \xrightarrow{\tilde{p}} F_{\mathbf{C}}Y$ die $U_{\mathbf{C}}$-Fortsetzung von $r_{F_{\mathbf{A}}Y} \circ p \circ u^{\mathbf{A}}_X$ (und analog für q). Dann existiert nach Voraussetzung an **C** ein **C**-Coegalisator $F_{\mathbf{C}}X \underset{\tilde{q}}{\overset{\tilde{p}}{\rightrightarrows}} F_{\mathbf{C}}Y \xrightarrow{\tilde{c}} \tilde{A}$. Nach Konstruktion gilt dann

$\tilde{c} \circ r_{F_{\mathbf{A}}Y} \circ p = \tilde{c} \circ r_{F_{\mathbf{A}}Y} \circ q$, also existiert ein $A \xrightarrow{r_A} \tilde{A}$ mit $r_A \circ c = \tilde{c} \circ r_{F_{\mathbf{A}}Y}$. Und r_A ist Reflektionspfeil: Sei $(A \xrightarrow{f} C) \in \mathbf{C}$:



Dann sei f' die (eindeutige) $U_{\mathbf{C}}$-Fortsetzung von $f \circ c \circ u_Y^{\mathbf{A}}$. Nach Konstruktion gilt dann $f' \circ \tilde{p} = f' \circ \tilde{q}$, also existiert (eindeutiges) $\bar{f}$ mit $\bar{f} \circ \tilde{c} = f'$. Damit gilt $\bar{f} \circ r_A = f$, da c Epimorphismus ist, und $\bar{f}$ ist als solches eindeutig. ($)

- Eine λ-direktive und limesabgeschlossene Unterkategorie ist reflektiv nach [AR 2.48]. $

3.5 Bemerkung

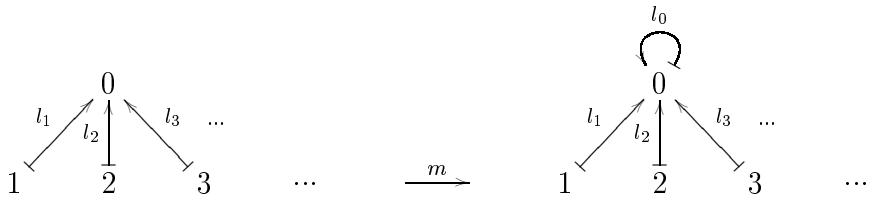
(1) Daß eine λ-direktive Quasivarietät λ-är ist, ist bemerkenswert in Hinblick auf 2.6 !

(2) Analog ist eine Quasivarietät genau dann abgeschlossen unter λ-gerichteten Colimiten von Monodiagrammen, wenn sie durch eine Klasse von Morphismen mit λ-erzeugbaren Domain definierbar ist (man kann den Beweis von [BH Prop2] hierzu geeignet modifizieren, denn jedes Objekt eines λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ ist nach [GU 9.5] λ-gerichteter Colimes seiner λ-erzeugbaren Unterobjekte - für einen anderen Beweis siehe [A90 p46]). Immerhin ist auch eine Orthogonalitätsklasse, die durch eine Menge von Morphismen mit λ-erzeugbaren Domain definierbar ist, abgeschlossen

unter λ-gerichteten Colimiten von Monodiagrammen, die Rückrichtung gilt jedoch im allgemeinen nicht (siehe (2.8(2))).

(3) Weitere Beispiele für nicht unter Colimiten von λ-gerichteten Monodiagrammen abgeschlossene Quasivarietäten (vgl. 3.5(2)) sind a $\not\cong$ 3 in 4.8 und: $\mathbf{A}{:=}\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\mathbf{\Sigma}$ mit $\Sigma := \{l_n : n \in \mathbb{N}\}$ (unäre Operationen), $\mathbf{C} := \{m\}^{\perp}$ mit dem Quotientenmorphismus

$$(F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}/_{\bigwedge\limits_{n>0} l_n n=0})_{\mathbf{A}} \xrightarrow{m} (F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}/_{\bigwedge\limits_{n\geq 0} l_n n=0})_{\mathbf{A}} \ :$$



Der $\mathbf{A}$-Colimes des gerichteten $\mathbf{C}$-Monodiagrammes

$$\left((F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}_{\leq i}/_{\bigwedge\limits_{i\geq n>0} l_n n=0})_{\mathbf{A}} \xrightarrow{m_i} (F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}_{\leq i+1}/_{\bigwedge\limits_{i+1\geq n>0} l_n n=0})_{\mathbf{A}} \right)_{i\in\mathbb{N}}$$

ist dann $(F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}/_{\bigwedge\limits_{n>0} l_n n=0})_{\mathbf{A}}$, und somit nicht in $\mathbf{C}$.

(4) Ein Beispiel für eine Quasivarietät, die abgeschlossen unter Colimiten λ-gerichteter Monodiagramme, aber nicht λ-direktiv ist, sind die Algebren mit den unären Operationen p_n ($n \in \mathbb{N}$), die die Implikation $\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} p_n(x) = p_n(y) \Rightarrow x = y$ erfüllen. Für ein weiteres, siehe [A90 p45].

(5) Für ein weiteres Beispiel einer Unterkategorie, die kanonische freie Objekte hat und abgeschlossen unter Colimiten λ-gerichteter Mono-Diagramme, aber nicht reflektiv ist, siehe 1.26.

(6) Für einige abstrakte Analoga der oben angegebenen konkreten Eigenschaften einer Kategorie $\mathbf{C}$ lassen sich folgende interne Charakterisierungen angeben:

   (1) Es existiert genau dann eine λ-äre Signatur τ und eine Sorte $\mathcal{S}$, sodaß $\mathbf{C}$ eine reflektive und λ-direktive Unterkategorie in $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ ist, wenn $\mathbf{C}$ lokal λ-präsentierbar ist ($\Rightarrow$: 2.9).

   (2) Es existiert genau dann eine λ-äre Signatur τ und eine Sorte $\mathcal{S}$, sodaß $\mathbf{C}$ eine λ-orthogonale Unterkategorie in $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ ist, wenn $\mathbf{C}$ lokal λ-präsentierbar ist (siehe 2.10).

(3) Es existiert genau dann eine λ-äre Signatur τ und eine Sorte $\mathcal{S}$, sodaß $\mathbf{C}$ eine λ-äre Quasivarietät in $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ ist, wenn $\mathbf{C}$ lokal λ-präsentierbar ist und eine dichte Unterkategorie aus regulär-projektiven Objekten besitzt [AR 3.33i].

(4) Es existiert genau dann eine λ-äre Signatur τ und eine Sorte $\mathcal{S}$, sodaß $\mathbf{C}$ eine (λ-äre) Varietät in $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ ist, wenn $\mathbf{C}$ lokal λ-präsentierbar ist, effektive Äquivalenzrelationen hat und eine dichte Unterkategorie aus regulär-projektiven Objekten besitzt [AR 3.33ii].

Außerdem ist eine Quasivarietät $\mathbf{C}\overset{E}{\hookrightarrow}\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\tau$, die abstrakt äquivalent zu einer Varietät, auch mittels E eine Varietät [AR 3.25 Proof].
Damit lassen sich für einige Umkehrungen der Implikationen in 3.4 also auch dann noch Gegenbeispiele finden, wenn man die Oberkategorie $\mathbf{Alg}\,\tau$, die Einbettung und den Vergißfunktor nicht fixiert: Ein Beispiel ist die Quasivarietät **Gra**, die nicht äquivalent zu einer Varietät ist [AR 3.21(2)]).
Beispiele von (nicht λ-ären) λ-Quasivarietäten, die nicht äquivalent zu λ-orthogonalen Unterkategorien von λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$, und von λ-orthogonalen Unterkategorien von λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$, die nicht äquivalent zu λ-Quasivarietäten sind, ergeben sich daraus, daß jeweils zwischen den abstrakten Bedingungen an Objekte in 4.1 (oder auch der abstrakten Bedingung der λ-Kompaktheit in 4.6) Implikationen in Unterkategorie, die die eine Eigenschaft haben, gelten, die in Unterkategorien der anderen Eigenschaft nicht gelten: So sind etwa λ-kleine Objekte in λ-orthogonalen Unterkategorien von λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ λ-präsentierbar, dies gilt im allgemeinen aber nicht in λ-Quasivarietäten. Und in λ-Quasivarietäten sind λ-erzeugbare Objekte λ-vereinigbar, und dies gilt im allgemeinen nicht in λ-orthogonalen Unterkategorien von λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ (s. 4.4).
Außerdem folgt aus den obigen Charakterisierungen, daß jede reflektive und λ-direktive Unterkategorie eines λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ eine λ-Orthogonalitätsklasse in einem $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}'}\tau'$ für geeignete $\mathcal{S}'$ und λ-äres τ' ist.

(5) Mit Vopěnka's Prinzip ist eine Unterkategorie eines $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ genau dann limesabgeschlossen, wenn sie reflektiv ist, oder äquivalent, wenn sie eine Orthogonalitätsklasse (wahlweise zu einer Klasse oder einer Menge von Morphismen) ist [AR 6.24]. Weiter ist dann jede (volle) Unterkategorie Quellen-reflektiv [AR 6.7].

3.6 Notiz (vgl. 2.11(3))
In einer unter Colimiten von λ-gerichteten Monodiagrammen abgeschlossenen Unterkategorie $\mathbf{C}$ einer Kategorie $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ mit λ-ärem τ bestehen die Colimes-Senken zu λ-gerichteten Monodiagrammen aus Monomorphismen (und sind somit λ-gerichtete Vereinigungen). In einer Quasivarietät gilt dies im allgemeinen nicht.

Beweis
Der erste Teil folgt aus 2.11(3) (die freien Objekte in $\mathbf{C}$ über endliche Mengen bilden einen λ-erzeugbaren Generator).
Ein Beispiel für eine Quasivarietät in einem λ-ären $\mathbf{Alg}\,\tau$ mit einer Colimes-Senke zu einem Monodiagramm, die nicht aus Monomorphismen besteht (und somit keine λ-gerichtete Vereinigung ist), ist $\mathbf{pAb}$: Der $\mathbf{pAb}$-Colimes des gerichteten Monodiagrammes der endlichen Untergruppen von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist $\{0\}$, und somit besteht die Colimes-Senke nicht aus Monomorphismen (s. 3.4(7)). \$

3.7 Notiz (vgl. 2.13)
Sei $\mathbf{C}$ eine Unterkategorie von $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ (für λ-äres τ) mit kanonischen freien Objekten.

(1) *Ist $\mathbf{C}$ abgeschlossen unter Colimiten von λ-gerichteten Monodiagrammen, so ist für eine aus Monomorphismen bestehende Senke $\mathcal{S}$, die natürlich bzgl. eines λ-gerichteten Diagramms D ist, der $\mathcal{S}$ faktorisierende Morphismus vom Colimes von D zu $\operatorname{cod}\mathcal{S}$ ein Monomorphismus.*

(2) *Wenn $\mathbf{C}$ Unterobjekt-abgeschlossen ist, dann ist $\mathbf{C}$ abgeschlossen unter Colimiten von λ-gerichteten Monodiagrammen, die in $\mathbf{C}$ eine aus $\mathbf{C}$-Monomorphismen bestehende natürliche Senke besitzen. Also ist $\mathbf{C}$ insbesondere abgeschlossen in $\mathbf{A}$ unter in $\mathbf{C}$ existierenden λ-gerichteten Colimiten mit Mono-Transformationen. Somit ist dann ebenfalls für eine aus Monomorphismen bestehende Senke $\mathcal{S}$, die natürlich bzgl. eines λ-gerichteten Diagramms D ist, der faktorisierende Morphismus vom Colimes von D zu $\operatorname{cod}\mathcal{S}$ ein Monomorphismus.*

(3) *Somit sind sowohl für unter Colimiten von λ-gerichteten Monodiagrammen abgeschlossenes $\mathbf{C}$, als auch für Unterobjekt-abgeschlossenes $\mathbf{C}$ λ-gerichtete Vereinigungen λ-gerichtete Colimiten.*

(4) *Ist $\mathbf{C}$ lediglich reflektiv, sind λ-gerichtete Vereinigungen im allgemeinen nicht λ-gerichtete Colimiten, und λ-gerichtete Vereinigungen zu einem Monodiagramm sind im allgemeinen nicht einmal (bis auf einen Isomorphismus) eindeutig bestimmt.*

Beweis

(1) Dies gilt in einem $\mathbf{C}$ mit der angegebenen Voraussetzung (mithilfe [AHS 7.32(2)] und 1.10(1)), da es im λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ der Fall ist (siehe 2.11(2)).

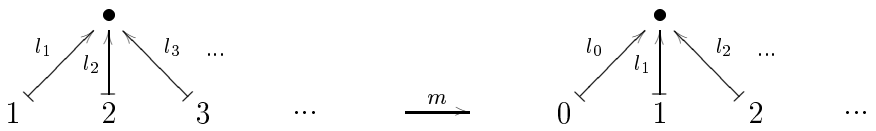
(2) Da der faktorisierende Morphismus vom $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$-Colimes zum Codomain der Senke $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$-Mono ist (siehe oben), ist der $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$-Colimes in $\mathbf{C}$ (und damit $\mathbf{C}$-Colimes wegen 1.4(1)).

(3) Eine $\mathbf{C}$-Vereinigung eines λ-gerichteten Monodiagrammes faktorisiert in $\mathbf{A}$ durch dessen $\mathbf{A}$-Colimes. Der faktorisierende Morphismus h ist ein $\mathbf{C}$-Mono nach 2.11(2), Voraussetzung an $\mathbf{C}$ (bzw. obiger Beobachtung) und 1.10(1). Nach Definition Vereinigung ist h damit sogar Iso.

(4) Für ein Gegenbeispiel einer reflektiven Unterkategorie einer λ-ären $\mathbf{A} := \mathbf{Alg}\,\mathbf{\Sigma}$ vergleiche 4.4: $3 \overset{n}{\not\Rightarrow} 4$, oder sei $\Sigma = \{l_n : n \in \mathbb{N}\}$ (unäre Operationen) und $\mathbf{C} = \{q\}^{\perp}$ für folgendes q:

$$(F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}_{>0}/\bigwedge_{n,n'>0} l_n n = l_{n'} n')_{\mathbf{A}} \xrightarrow{\ q\ } (F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}/\bigwedge_{n,n'\in\mathbb{N}} l_n n = l_{n'} n')_{\mathbf{A}}\ ,$$

$$n \mapsto n :$$



(dom q ist notwendigerweise nicht endlich erzeugt, vergleiche 3.5(2)). Dann ist $(F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}/_{l_1 0 = 0 \wedge \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} l_n n = 1})_{\mathbf{A}}$ $\mathbf{C}$-Vereinigung des gerichteten Diagrammes der $((F_{\mathbf{A}}\{1,...,m\}/\bigwedge_{m\geq n>0} l_n n=1)_{\mathbf{A}})_{m>0}$ in $\mathbf{C}$, aber nicht deren $\mathbf{C}$-Colimes, denn das ist (das nicht dazu isomorphe) $(F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}/\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} l_n n=1)_{\mathbf{A}}$. Da der $\mathbf{C}$-Colimes eine λ-gerichtete Vereinigung ist (der Reflektionspfeil vom $\mathbf{A}$-Colimes ist ein Mono), sind λ-gerichtete Vereinigungen nicht bis auf Iso bestimmt. \$

(Die Definitionen der Kleinheitsbedingungen, zu denen in der folgenden Notiz einige später benötigte Eigenschaften zusammengestellt werden, werden als Erleichterung für den Leser in 4.1 und 4.6 in Erinnerung gerufen.)

3.8 Notiz

(1) *Sei* $\mathbf{C}$ *Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten einer Kategorie der Form* $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ *für eine Sortenmenge* $\mathcal{S}$ *und eine* λ*-äre Signatur* τ*. Ist*

C *Unterobjekt-abgeschlossen «bzw. abgeschlossen unter Unterobjekten und Colimiten von λ-gerichteten Mono-Diagrammen», so ist für jedes Objekt die Senke der Inklusionen seiner schwach λ-erzeugbaren «bzw. λ-erzeugbaren» Unterobjekte eine Colimes-Senke (zu dem λ-gerichteten Mono-Diagramm der schwach λ-erzeugbaren «bzw. λ-erzeugbaren» Unterobjekte).*

(2) *Ist* **C** *λ-direktive reflektive Unterkategorie, so ist für jedes Objekt die Senke der Inklusionen seiner schwach λ-erzeugbaren «bzw. λ-erzeugbaren» Unterobjekte eine Colimes-Senke (zu dem λ-gerichteten Mono-Diagramm der schwach λ-erzeugbaren «bzw. λ-erzeugbaren» Unterobjekte).*

(3) *Ist* **C** *lediglich reflektiv, so ist im allgemeinen nicht für jedes Objekt die λ-gerichtete Senke der Inklusionen seiner schwach λ-erzeugbaren «bzw. λ-erzeugbaren» Unterobjekte eine Colimes-Senke.*

Beweis

(1) Für $\mathbf{C}=\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ gilt dies nach 2.15(2) (und da die schwach λ-erzeugbaren Objekte nach 3.6 genau die λ-erzeugbaren sind). Sei **C** eine Unterobjekt-abgeschlossene Unterkategorie **C** mit kanonischen freien Objekten von $\mathbf{A}:=\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$, $A \in \mathbf{C}$. A ist **A**-Colimes des (λ-gerichteten Mono-)Diagramms D seiner schwach λ-erzeugbaren «bzw. λ-erzeugbaren» **A**-Unterobjekte. Nach Annahme enthält **C** D, und nach 3.5(2) ist A auch der **C**-Colimes von D und sind die D-Objekte schwach λ-erzeugbar (und sogar λ-erzeugbar, wenn **C** abgeschlossen unter Colimiten von λ-gerichteten Mono-Diagrammen ist).

(2) Die Aussage für λ-direktives reflektives **C** folgt mit 2.9, 2.15(2) und da die schwach λ-erzeugbaren Objekte nach 3.6 λ-erzeugbar sind.

(3) Sonst würde analog zu 4.4: $7 \overset{S\vee O}{\Rightarrow} 5$ gelten, daß in reflektivem **C** ein Objekt, daß vom Typ λ ist, schon schwach λ-erzeugbar «bzw. λ-erzeugbar» ist - ein Gegenbeispiel dafür gibt es in 4.4: $7 \overset{n}{\not\Rightarrow} 5$. \$

3.9 Bemerkung

Wir werden später sehen (siehe 4.8), daß man in 3.8 für Unterobjekt-abgeschlossenes **C** schwach λ-erzeugbar auch durch λ-kompakt (im ersten Teil auch λ-erzeugt) ersetzen kann.

In einer λ-orthogonalen Unterkategorie **C** eines λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ ist ein Objekt im

allgemeinen nicht Colimes eines λ-gerichteten Mono-Diagramms von λ-erzeugten Objekten (denn sonst könnte man analog zu 4.16 zeigen, daß in $\mathbf{C}$ die λ-erzeugbaren Objekte λ-erzeugt sind, im Widerspruch zu 4.8).

3.10 Notiz
In jeder Unterkategorie $\mathbf{C}$ von λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$, die abgeschlossen unter Colimiten von λ-gerichteten Diagrammen «bzw. Mono-Diagrammen» ist, kommutieren λ-kleine Limiten mit Colimiten von λ-gerichteten Diagrammen «bzw. Mono-Diagrammen». In Quasivarietäten gilt dies im allgemeinen nicht.

Beweis
Die Aussage gilt für $\mathbf{C}=\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ nach 2.17(2) und somit auch für ein $\mathbf{C}$ mit den angegebenen Eigenschaften «vgl. auch 2.15(1)».
Für ein Gegenbeispiel in einer Quasivarietät, betrachte **pAb** (s.3.4(7)). Für eine 1/2 enthaltende endliche Untergruppe S von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist der Egalisator von $\mathbb{Z}_2 \underset{1\mapsto 1/2}{\overset{1\mapsto 0}{\rightrightarrows}} S$ $\{0\}$. Der **pAb**-Colimes des λ-gerichteten Mono-Diagramms der 1/2 enthaltenden endlichen Untergruppen von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist $\{0\}$. Somit ist der Colimes der Egalisatoren (nämlich $\{0\}$) nicht der Egalisator des Colimes (nämlich $\mathbb{Z}_2$). \$

3.11 Notiz

(1) *Sei $\mathbf{C}$ eine reflektive oder Unterobjekt-abgeschlossene Unterkategorie eines λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$. Dann ist $\mathbf{C}$ eine (ExtrEpi, Monomorphismus)-Kategorie, die $\mathbf{C}$-extremalen Epimorphismen sind genau die $\mathbf{C}$-starken Epimorphismen und abgeschlossen unter Komposition. Außerdem ist $\mathbf{C}$ eine (Epi, ExtrMono)-Kategorie.*

(2) *Eine λ-direktive reflektive Unterkategorie $\mathbf{C}$ eines λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ ist eine (ExtrEpi, Mono-Quelle)-Kategorie.*

(3) *Jede Quasivarietät ist eine (RegEpi, Mono-Quelle)-Kategorie.*

(4) *In $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ sind alle Epimorphismen regulär. In Varietäten ist ein Epimorphismus im allgemeinen nicht einmal stark.*

(5) *In jeder reflektiven Unterkategorie $\mathbf{C}$ von $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ sind die strikten Epimorphismen regulär.*

Beweis

(1) $\mathbf{C}$ ist eine (ExtrEpi, Monomorphismus)-Kategorie wegen [AHS 14.17] (für Unterobjekt-abgeschlossenes $\mathbf{C}$ beachten wir, daß der im Beweis von [AHS 14.17] benutzte und in $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ existierende Pullback in $\mathbf{C}$

ist, da $\hat{m}$ ein Monomorphismus ist) und eine (Epi, ExtrMono)-Kategorie nach [AHS 14.19] (denn $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ hat Egalisatoren und Durchschnitte, und das reflektive (und isomorphieabgeschlossene nach 1.4(1), siehe [AHS 13.27]) bzw. Unterobjekt-abgeschlossene $\mathbf{C}$ ist diesbezüglich abgeschlossen). Das weitere gilt wegen [AHS 14.1(3)], bzw. [AHS 14.6(2)].

(2) Dies gilt wegen 2.20.

(3) $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ ist eine (RegEpi, Mono-Quelle)-Kategorie (wegen 2 und 4) und Quasivarietäten sind Mono-Quellen-abgeschlossen [AHS 16.8]. Da die Einbettung reguläre Epimorphismen reflektieren (denn der Reflektor bewahrt Coegalisatoren), haben Quasivarietäten reguläre Faktorisierungen und sind somit (RegEpi, Mono-Quelle)-Kategorien [AHS 15.13].

(4) Siehe [AR 3.4(2)vii] bzw. 4.4 $6 \overset{y}{\not\Rightarrow} 5$).

(5) Dies gilt wegen [GU 1.4], da $\mathbf{C}$ kovollständig ist und den Generator $\{F_{\mathbf{C}}1_s : s \in \mathcal{S}\}$ besitzt (1.19 und 1.13). \$

3.12 Notiz

In Unterobjekt-abgeschlossenen Unterkategorien mit kanonischen freien Objekten von λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ sind die extremalen Epi-Senken genau die überdeckenden Senken.

In λ-orthogonalen Unterkategorien ist dies im allgemeinen nicht der Fall.

Beweis

Sei $\mathbf{C}$ eine Unterobjekt-abgeschlossene Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten eines λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$. Die extremalen Epi-Senken in $\mathbf{C}$ sind überdeckend: $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ hat (mittels der Vereinigung der Bilder der Senken-Morphismen) (Überdeckend,Monomorphismus)-Faktorisierungen für Senken, und diese sind nach Annahme in $\mathbf{C}$, per Definition extremale Epi-Senke muß der Monomorphismus also ein Isomorphismus sein.

Eine überdeckende Senke ist epimorph, weil treue Funktoren epimorphe Senken reflektieren, und extremal, weil adjungierte Funktoren Monomorphismen bewahren.

In λ-orthogonalen Unterkategorien von λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ sind im allgemeinen nicht einmal die regulären Morphismen surjektiv: Vergleiche die Kategorie $\mathbf{Cat}$ [AHS 7.72(5)] (mit [GU 7.2d]). \$

3.13 Notiz

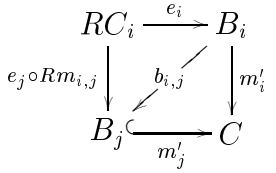
Sei $\mathbf{C}$ eine Unterkategorie eines λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$, die Unterobjekt-abgeschlossen mit kanonischen freien Objekten oder reflektiv ist. Dann ist für jedes Objekt die Senke der Inklusionen seiner extremal λ-erzeugten Unterobjekte eine Colimes-Senke (zu

dem λ-gerichteten Mono-Diagramm der extremal λ-erzeugten Unterobjekte).
Ist $\mathbf{C}$ *statt dessen abgeschlossen unter λ-gerichteten Mono-Diagrammen und hat kanonische freie Objekte, so ist dies im allgemeinen nicht der Fall.*

Beweis
In einer λ-ären Kategorie $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ ist nach [H71 p283] jedes Objekt in oben genannter Weise λ-gerichteter Colimes seiner extremal λ-erzeugten Unterobjekte. Sei $C \in \mathbf{C} \subseteq \mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau =: \mathbf{A}$.

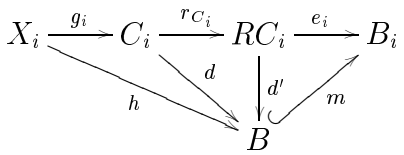
(a) Für Unterobjekt-abgeschlossenes $\mathbf{C}$ mit kanonischen freien Objekten ist das Diagramm D der $\mathbf{A}$-extremal λ-erzeugten Unterobjekte von C in $\mathbf{C}$. Die Objekte in D sind nach 1.10(1) und 1.10(2) genau die extremal λ-erzeugten Unterobjekte von C bezüglich $\mathbf{C}$. Und wegen 1.4(1) ist C der $\mathbf{C}$-Colimes von D.

(b) Sei $\mathbf{C}$ reflektiv. Wir haben eine $\mathbf{A}$-Colimes-Senke $(\, C_i \overset{m_i}{\hookrightarrow} C \,)_{i\in I}$ (mit $X_i \in \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$ und $\mathbf{A}$-extremal erzeugenden $X_i \xrightarrow{g_i} C_i$ und Monomorphismen m_i) zu einem λ-gerichteten Diagramm mit Morphismen $C_i \xrightarrow{m_{i,j}} C_j$. Dann ist $(\, RC_i \xrightarrow{\bar{m}_i} C \,)_{i\in I}$ $\mathbf{C}$-Colimes (sei $r_{C_i} \circ \bar{m}_i = m_i$) zum Diagramm mit Morphismen $RC_i \xrightarrow{Rm_{i,j}} RC_j$. Nach [AHS 14.17] ist $\mathbf{C}$ (ExtrEpi, Monomorphismus)-strukturiert, weil stark vollständig [AHS 13.13(2),13.27]. Sei (für jedes $i \in I$) $(\, RC_i \xrightarrow{e_i} B_i \overset{m'_i}{\hookrightarrow} C \,) = \bar{m}_i$ eine $\mathbf{C}$-(ExtrEpi, Mono)-Faktorisierung. Dann existieren für $i, j \in I$ (per $\mathbf{C}$-(ExtrEpi, Mono)-Diagonalisierung) $B_i \xrightarrow{b_{i,j}} B_j$ sodaß $b_{i,j} \circ e_i = e_j \circ Rm_{i,j}$:



Dann ist $(\, B_i \overset{m'_i}{\hookrightarrow} C \,)_{i\in I}$ eine $\mathbf{C}$-Colimes-Senke bezüglich der $(b_{i,j})$, da die e_i epimorph sind.
Es reicht nun zu zeigen, daß (für jedes i) $e_i \circ r_{C_i} \circ g_i$ $\mathbf{C}$-extremal erzeugend ist (vgl. auch [AHS 17.7(3)]). Die $\mathbf{C}$-Erzeugtheit folgt aus der $\mathbf{A}$-Erzeugtheit von g_i, der E-Erzeugtheit (für die Einbettung E) von r_{C_i} und der $\mathbf{C}$-Epimorphie von e_i. Die $\mathbf{C}$-Extremalität folgt so: Sei $(\, X_i \xrightarrow{h} B \overset{m}{\hookrightarrow} C \,) = e_i \circ r_{C_i} \circ g_i$ mit $B \in \mathbf{C}$ und m ein Monomorphismus. Da $\mathbf{A}$ eine (Extremal-Erzeugend, Mono-Quelle)-Kategorie ist [AHS 15.3(3)], existiert $C_i \xrightarrow{d} B$ mit $m \circ d = e_i \circ r_{C_i}$. Da r_{C_i} Reflekti-

onspfeil ist, existiert $RC_i \xrightarrow{d'} B$ mit $m \circ d' = e_i$:



Da e_i extremaler Epimorphismus ist, folgt, daß m ein Isomorphismus ist.

Würde die Aussage auch für jedes $\mathbf{C}$, daß abgeschlossen unter λ-gerichteten Mono-Diagrammen ist und kanonische freie Objekte hat, so würde daraus folgen, daß schwach λ-erzeugbare Objekte in solchen Unterkategorien extremal λ-erzeugt sind, im Widerspruch zu 4.8: $5 \overset{m}{\not\twoheadrightarrow} \mathrm{e}$. \$

3.14 Fakt

Sei $\mathbf{C}$ *eine (ExtrEpi,Mono)-Kategorie, seien* $\mathbf{I} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathbf{C}$ *zwei Diagramme, sei* $F \xrightarrow{e} G$ *eine natürliche Transformation, sodaß, für jedes* $i \in \mathbf{I}$, e_i *ein extremaler Epimorphismus ist. Dann ist der Colimes der* e_i *(*$i \in \mathbf{I}$*) ein extremaler Epimorphismus (sofern er existiert).* \$

3.15 Fakt

(1) *Sei* $\mathbf{A}$ *eine konkrete Kategorie, deren Vergißfunktor* λ*-gerichtete Colimiten reflektiert (z.B. ein* λ*-äres* $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$*), und* $\mathbf{C}$ *eine konkrete Unterkategorie. Dann bewahrt der* $\mathbf{C}$*-Vergißfunktor genau dann* λ*-gerichtete Colimiten, wenn die Einbettung dies tut.*

(2) *Sei* $\mathbf{C}$ *konkrete Unterkategorie mit* λ*-gerichteten Colimiten einer konkreten Kategorie* $\mathbf{A}$ *mit* λ*-gerichteten Colimiten. Dann ist* $\mathbf{C}$ *genau dann* λ*-direktiv, wenn die Einbettung* λ*-gerichtete Colimiten bewahrt.*

(3) *Sei* $\mathbf{C}$ *eine Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten eines* λ*-ären* $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$*. Der* $\mathbf{C}$*-Vergißfunktor* $U_{\mathbf{C}}$ *bewahrt genau dann* λ*-gerichtete Colimiten, wenn für jedes* $s \in \mathcal{S}$ $F_{\mathbf{C}} 1_s$ λ*-präsentierbar ist.*

Beweis

(1) Für λ-äres τ reflektiert $U_{\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau}$ λ-gerichtete Colimiten [AR 3.4(4)].

(2) Der Vollständigkeit der Beweisführung halber sei hier ausnahmeweise erlaubt anzumerken, daß die oben unter (2) genannte Aussage offensichtlich richtig ist.

(3) $\Rightarrow$: Jedes 1_s ($s \in \mathcal{S}$) ist in $\mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$ λ-präsentierbar [AR 1.14(1)], also nach 2.1 auch $F_{\mathbf{C}}1_s$ in $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$.

$\Leftarrow$: Für jedes $s \in \mathcal{S}$ gilt $U_s \circ U_{\mathbf{C}} \cong \hom_{\mathbf{C}}(F_{\mathbf{C}}1_s, _)$ und die U_s ($s \in \mathcal{S}$) reflektieren gemeinschaftlich Colimiten (s. 1.18). \$

Kapitel 4

Kleine Objekte in Kategorien von Algebren

4.1 Kleinheitsbedingungen I

In diesem (und im folgenden) Abschnitt wird festgestellt, welche Implikationen zwischen verschiedenen Kleinheitsbedingungen an Objekte in Kategorien von Algebren mit bestimmten Eigenschaften bestehen. Für jede Implikation wird jeweils die schwächste Voraussetzung bezüglich der in Kapitel 2 vorgestellten Hierarchie von Unterkategorien angegeben, die für die Gültigkeit der Implikation hinreichend ist. Dabei geht es in diesem Abschnitt um Kleinheitsbedingungen an ein Objekt, die Bewahreigenschaften des zugehörigen kovarianten Hom-Funktors darstellen (in diesem Sinne also externe Bedingungen). Die Konzepte der λ-Präsentierbarkeit und λ-Erzeugbarkeit wurden unabhängig voneinander als kategorielle Charakterisierung der Begriffe der (algebraischen) endlichen Präsentiertheit und endlichen Erzeugtheit in [GU] und [ArGrVer] eingeführt (siehe [AR p66]), die Abschwächung "λ-klein" des Begriffes "λ-präsentierbar" in [BH].

4.1 Definition

Ein Objekt A einer Kategorie **A** heißt

(1) λ **-präsentierbar**, wenn der zugehörige kovariante Hom-Funktor $\hom_{\mathbf{A}}(A, _) : \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$ λ-gerichtete Colimiten bewahrt [GU 6.1],

(2) λ **-klein**, wenn der zugehörige kovariante Hom-Funktor $\hom_{\mathbf{A}}(A, _) : \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$ λ-gerichtete Colimiten in Epi-Senken überführt [BH 150],

(3) λ **-erzeugbar**, wenn der zugehörige kovariante Hom-Funktor $\hom_{\mathbf{A}}(A, _) : \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$ λ-gerichtete Colimiten von Monodiagrammen bewahrt [GU 6.1],

(4) λ **-vereinigbar**, wenn der zugehörige kovariante Hom-Funktor $\hom_{\mathbf{A}}(A, _) : \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$ λ-gerichtete Vereinigungen bewahrt,

(5) **schwach** λ**-erzeugbar**, wenn der zugehörige kovariante Hom-Funktor $\hom_{\mathbf{A}}(A, _) : \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$ λ-gerichtete Colimiten mit Monotransformationen bewahrt,

(6) **schwach vom Typ** λ, wenn für jedes λ-gerichtete Diagramm $\mathbf{I} \xrightarrow{D} \mathbf{A}$ der kanonische Morphismus $\operatorname{col}_{\mathbf{Set}}(\hom_{\mathbf{A}}(A, _) \circ D) \to \hom_{\mathbf{A}}(A, \operatorname{col}_{\mathbf{A}} D)$ injektiv ist [Fa72 Déf. 1],

(7) **vom Typ** λ, wenn für jede aus Monomorphismen bestehende Colimes-Senke $(m_i : A_i \to A)_{i \in I}$ zu einem λ-gerichteten Diagramm eines der m_i ein Isomorphismus ist ([Pa 148]: "kompakt", [Nou]).

4.2 Bemerkung

(1) (1) bzw. (2) bedeutet, daß der kanonische Morphismus in (6) bijektiv bzw. surjektiv ist. Somit ist ein Objekt A genau dann λ-klein und schwach vom Typ λ, wenn es λ-präsentierbar ist.

(2) (2) ist äquivalent dazu, daß λ-gerichtete Colimiten $\hom_{\mathbf{A}}(A, _)$-final sind [H71 p280 1⇔6].
Leider kommt es hier, wenn $\mathbf{A}$ eine Funktorkategorie ist, zu einer Kollision des Begriffes (2) mit dem Begriff des λ-kleinen Diagramms [AR 1.15] ($Id_{\mathbb{N}}$ ist endlich-klein im Sinne von (2), aber nicht im Sinne von [AR 1.15]), die wir dadurch beheben, daß wir im ersten Fall von einem λ-kleinen Funktor und im zweiten von einem λ-kleinen Diagramm sprechen, obwohl die Begriffe Funktor und Diagramm ansonsten synonym sind.

(3) zu (3), (5): $\hom_{\mathbf{A}}(A, _) : \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$ bewahrt Monomorphismen [AHS 7.37(1)].

(4) zu (4): Nach 2.13 sind λ-gerichtete Vereinigungen in **Set** Colimiten. Somit bedeutet (4), daß $\hom_{\mathbf{A}}(A, _)$ λ-gerichtete Vereinigungen in Colimiten überführt, d.h. (da Vereinigungs-Senken per Definition aus Monomorphismen bestehen): für jede Vereinigung $(S_i \xhookrightarrow{m_i} U)_{i \in I}$ und jedes $A \xrightarrow{f} U$ existiert $i \in I$ und $A \xrightarrow{f'} S_i$, sodaß $f = m_i \circ f'$.

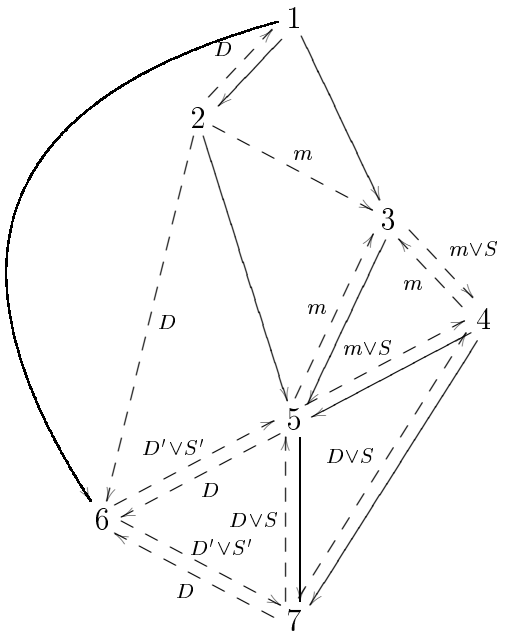
(5) (7) ist äquivalent dazu, daß $\hom_{\mathbf{A}}(A, _) : \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$ für aus Monomorphismen bestehende Colimes-Senken mit Colimes A ebendiesen Colimes bewahrt.

4.3 Fakt

Reflektoren bewahren λ-Kleinheit von $\mathcal{E}$-projektiven Objekten (wobei $\mathcal{E}$ die Klasse der Reflektionspfeile sei). \$

In der folgenden Proposition werden die Beziehungen zwischen Kleinheitsbedingungen an Objekte in Kategorien von Algebren untersucht. Dabei bedeutet $p \to q$, daß ein Objekt einer beliebigen Kategorie $\mathbf{A}$, das p erfüllt, auch q erfüllt. Ein gestrichelter Pfeil mit Angabe einer Bedingung wie in 3.4 an eine Unterkategorie $\mathbf{A}$ von $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ (τ sei λ-är) macht die entsprechende Aussage für eine solche Kategorie. Dabei ist jeweils die minimale Bedingung in Bezug auf die Hierarchie in 3.4 angegeben. Insbesondere bedeutet das Fehlen eines Pfeiles zwischen zwei Bedingungen, daß die Implikation im allgemeinen nicht einmal für $\mathbf{Alg}\,\tau$, mit τ λ-är, gilt - außer wenn zwei angegebene Pfeile in offensichtlicher Weise komponiert werden können, und die Komposition aus Gründen der Lesbarkeit weggelassen wurde.
Offen bleibt, ob $1 \overset{r}{\Rightarrow} 4$ oder $2 \overset{r}{\Rightarrow} 4$ gelten.
Zusätzlich zu der Hierarchie in 3.4 sind zur besseren Einordnung der Kleinheitsbedingung 6 zwei Implikationen unter den Bedingungen D' und S' angegeben (da sie nicht Teil der genannten Hierarchie sind, wurden sie nicht auf Minimalität untersucht). Die Bedingung D' bedeutet hier die Bedingung D, d.h. λ-direktive reflektive Unterkategorie, mit der zusätzlichen Bedingung, daß alle Epimorphismen stark sind (vgl. 3.11(4)). Die Bedeutung von S' ist analog.

4.4 Proposition
Nach der vorhergehenden Erläuterung gelten die folgenden Beziehungen zwischen den Kleinheitsbedingungen (1)-(7):



Beweis
Es werden nur diejenigen Implikationen bewiesen und Gegenbeispiele angegeben, durch deren Kombination sich alle übrigen ergeben. Zur besseren Auffindbarkeit der Einzelaussagen sind sie alphanumerisch geordnet. Für eine Aufstellung der Bedingungen an Unterkategorien und Objekte siehe auch Anhang A.

1 ⇒ 2, 1 ⇒ 6: siehe 4.2(1)

1 ⇒ 3 folgt direkt aus den Definitionen.

1 $\overset{f}{\not\Rightarrow}$ **4** (mit kanonischen freien Objekten): Sei $\lambda := \aleph_0$, $\mathbf{A}$:=$\mathbf{Alg\,\Sigma}$ für $\Sigma := \{l_n : n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ (unäre Operationen), $\mathbf{C}\subseteq\mathbf{A}$ bestehe aus den $\mathbf{A}$-freien Objekten und den Objekten $A_m := (F_{\mathbf{A}}\{2,...,m\}/_{\bigwedge\limits_{2\le j\le m} l_j j=j})_{\mathbf{A}}$ (für $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$), sowie dem Objekt $A := (F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}/_{l_1 0=0 \wedge \bigwedge\limits_{1\le j} l_j j=j})_{\mathbf{A}}$. Dann ist A Vereinigung des gerichteten Diagrammes der A_m und $\hom_{\mathbf{C}}(A,_)$ bewahrt diese (nach 4.2(4)) nicht, denn id_A faktorisiert durch kein A_m.
$\hom_{\mathbf{C}}(A,_)$ bewahrt aber gerichtete Colimiten: Sei $(\ C_i \xrightarrow{c_i} C\ )_{i\in I}$ gerichteter Colimes (zu einem Diagramm D mit Morphismen $C_i \xrightarrow{c_{i,j}} C_j$)), sei $A \xrightarrow{h} C \in \mathbf{C}$. Letzteres ist nur möglich für $C = A$.
Dann sind aber nicht alle C_i $\mathbf{A}$-frei: Angenommen, es gelte $C_i = F_{\mathbf{A}}X_i$

(für geeignete X_i und $i \in I$). Dann existieren $C_i \xrightarrow{c'_i} F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}$, sodaß für den Quotientenmorphismus $F_{\mathbf{A}}\mathbb{N} \xrightarrow{q} A$ gilt: $c_i = q \circ c'_i$ (für alle $i \in I$): Für $x \in X_i$ definiere $c'_i(x)$ als das eindeutig bestimmte Element in $q^{-1}\{c_i(x)\}$, das als Term von minimaler Höhe in $\mathbb{N} \subseteq F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}$ darstellbar ist (dies ist eindeutig bestimmt nach Konstruktion von A). Damit gilt $c'_i[C_i] \subseteq F_{\mathbf{A}}\mathbb{N} \setminus < \{l_1(0)\} \cup \{l_j(j) : j \in \mathbb{N}_{>0}\} >_{F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}}$, also ist $q|_{c'_i[C_i]}$ nach Konstruktion A injektiv, und somit gilt (für alle i, j) $c'_i = c'_j \circ c_{i,j}$. Es gilt aber $\hom_{\mathbf{C}}(A, F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}) = \emptyset$, also kann A nicht Colimes sein, im Widerspruch zur Annahme.

Somit existiert ein $i \in I$ mit $C_i = A$ oder $C_i = A_m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Damit gibt es aber ein cofinales gerichtetes Unterdiagramm D' des gegebenen Diagramms, dessen Objekte C_i (für $i \in I' \subseteq I$) in $\{A\} \cup \{A_m : m \in \mathbb{N}\}$ sind (nämlich das der Objekte, die gemäß der Ordnung auf D über C_i liegen), und D' hat ebenfalls den Colimes A [AR 0.11]. Damit die Senke $(c_i)_{i \in I'}$ epimorph ist, muß es $i \in I'$ geben, sodaß $C_i = A$: Denn sonst gilt für $A \xrightarrow{f} A$ definiert durch $0 \mapsto 1, 1 \mapsto 0, \bigwedge_{n \geq 2} n \mapsto n$ und für alle $i \in I'$: $id \circ c_i = f \circ c_i$.

Dann gibt es aber sogar ein $i \in I'$ mit $C_i = A$ und $c_i(0) \neq c_i(1)$: Falls für alle $i \in I'$ mit $C_i = A$ etwa gälte $c_i(0) = c_i(1) = 0$, dann wäre die Senke wiederum nicht epimorph, (ebenso falls für alle $i \in I'$ gälte $c_i(0) = c_i(1) = 1$). Und wenn es $i, i' \in I'$ gibt, sodaß $C_i = C_{i'} = A$, $c_i(0) = c_i(1) = 0$ und $c_{i'}(0) = c_{i'}(1) = 1$, dann existiert (da das Diagramm gerichtet ist) $\bar{i} \geq i, i'$, sodaß notwendigerweise $C_{\bar{i}} = A$ und $c_{\bar{i}}(0) \neq c_{\bar{i}}(1)$ (damit sowohl c_i, als auch $c_{i'}$ durch $C_{\bar{i}}$ faktorisieren können). Damit haben wir ein Objekt des Diagramms gefunden, durch das h faktorisiert.

Gibt es nun $A \xrightarrow{g,g'} C_i$ (und notwendigerweise $C_i = A$), sodaß $c_i \circ g = c_i \circ g'$, dann existiert nach obiger Beobachtung ein $\bar{i} \geq i$, sodaß $c_{\bar{i}}$ ein Isomorphismus ist, und somit gilt $c_{i,\bar{i}} \circ g = c_{i,\bar{i}} \circ g'$. Also ist A endlich präsentierbar.

2 $\overset{D}{\Rightarrow}$ **1** (λ-direktive reflektive Unterkategorie): Dies folgt aus $2 \Rightarrow 5 \overset{D}{\Rightarrow} 6$ und 4.2(1).

2 $\overset{m}{\not\Rightarrow}$ **1** (Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten, abgeschlossen unter λ-gerichteten Colimiten von Monodiagrammen): Es genügt, eine Quasivarietät $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{Alg}\,\tau$ anzugeben, die abgeschlossen unter Colimiten λ-gerichteter Monodiagramme, aber nicht λ-direktiv ist. Dann ist nämlich $F_{\mathbf{C}}1$ λ-klein, da RegEpi-Reflektoren (d.h. Reflektoren einer Quasivarietät, vgl. [AHS 16.14]) λ-Kleinheit von freien Objekten bewahren (mit 4.3, denn diese sind in $\mathbf{Alg}\,\tau$ RegEpi-projektiv [AHS 9.29]), und $F_{\mathbf{Alg}\,\tau}1$ ist für λ-äres τ λ-klein (sogar

λ-präsentierbar, s. [AHS 11.28(4)]). Aber $F_{\mathbf{C}}1$ bewahrt nach 3.15 (1) und (2) nicht λ-gerichtete Colimiten, da $\mathbf{C}$ nicht λ-direktiv ist. Für ein Beispiel einer solchen Quasivarietät s. 3.5(4).

2 $\overset{m}{\Rightarrow}$ **3** (Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten, abgeschlossen unter λ-gerichteten Colimiten von Monodiagrammen): Dies gilt wegen 2 $\Rightarrow$5 und 5 $\overset{m}{\Rightarrow}$ 3.

2 $\overset{Q}{\not\Rightarrow}$ **3** (Quasivarietäten): Es genügt, eine λ-Quasivarietät $\mathbf{C}\subseteq\mathbf{Alg}\,\tau$ anzugeben, die nicht abgeschlossen unter Colimiten von λ-gerichteten Monodiagrammen ist. Dann ist nämlich $F_{\mathbf{C}}1$ λ-klein (siehe 2 $\overset{m}{\not\Rightarrow}$ 1), aber bewahrt nicht Colimiten von λ-gerichteten Monodiagrammen (analog zu 3.15:(1) und (2)). Für Beispiele solcher Quasivarietäten siehe 3.4(7) und 3.5(3).

2 $\Rightarrow$ **5:** Sei $(\ C_i \xrightarrow{c_i} C\ )_{i\in I}$ ein $\mathbf{C}$-Colimes, sodaß die c_i Monomorphismen sind, A sei ein $\mathbf{C}$-λ-kleines Objekt. Dann ist der faktorisierende Morphismus $\operatorname{col}\hom(A,C_i)\longrightarrow\hom(A,C)$ surjektiv nach Voraussetzung an A und injektiv nach Voraussetzung an die c_i, also bijektiv.

2 $\overset{D}{\Rightarrow}$ **6** folgt aus 5 $\overset{D}{\Rightarrow}$ 6.

2 $\overset{m}{\not\Rightarrow}$ **6** (Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten, abgeschlossen unter λ-gerichteten Colimiten von Monodiagrammen): Nach 4.2(1) ist ein Objekt A genau dann λ-klein und schwach vom Typ λ, wenn es λ-präsentierbar ist. Außerdem gilt 2 $\overset{m}{\not\Rightarrow}$ 1 (s.o.).

2 $\overset{Q}{\not\Rightarrow}$ **6** (Quasivarietäten): Nach 4.2(1) ist ein Objekt A genau dann λ-klein und schwach vom Typ λ, wenn es λ-präsentierbar ist. Außerdem gilt 2 $\overset{Q}{\not\Rightarrow}$ 1 wegen 2 $\overset{Q}{\not\Rightarrow}$ 3 (s.o.).

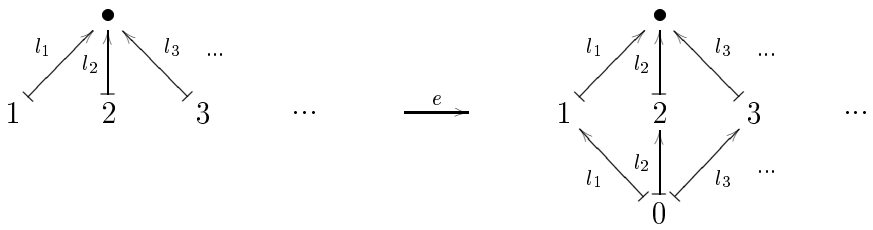
3 $\overset{A}{\not\Rightarrow}$ **2** ($\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ für ein λ-äres τ): Dies folgt mit [AR 3.11] und [BH p159] aus 4.8: a $\overset{A}{\not\Rightarrow}$ b.

3 $\overset{m\vee S}{\Rightarrow}$ **4** folgt aus 5 $\overset{m\vee S}{\Rightarrow}$ 4.

3 $\overset{r}{\not\Rightarrow}$ **4** (reflektive Unterkategorie): Sei $\mathbf{A}{:=}\mathbf{Alg}\,\mathbf{\Sigma}$ mit $\lambda := \aleph_0, \Sigma := \{l_n : n\in\mathbb{N}\}$ (unäre Operationen) und $\mathbf{C} := \{e,f,u\}^{\perp}$, wobei:

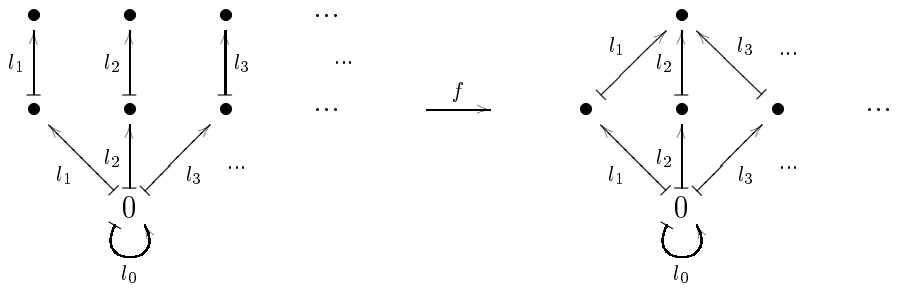
$$(F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}_{>0}/\bigwedge_{n,n'>0} l_n n{=}l_{n'}n')_{\mathbf{A}} \xrightarrow{\ e\ } (F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}/\bigwedge_{n,n'>0} l_n 0{=}n\wedge l_n n{=}l_{n'}n')_{\mathbf{A}}$$

$$n\mapsto n,$$



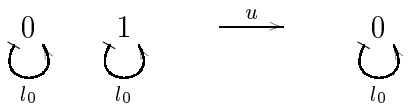
$$(F_{\mathbf{A}}1/_{l_00=0})_{\mathbf{A}} \xrightarrow{f} (F_{\mathbf{A}}1/_{l_00=0\wedge \bigwedge\limits_{n,n'>0} l_nl_n0=l_{n'}l_{n'}0})_{\mathbf{A}}$$

$$0 \mapsto 0,$$



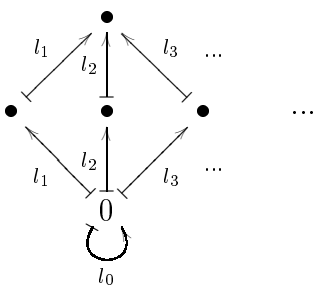
$$(F_{\mathbf{A}}2/_{l_00=0\wedge l_01=1})_{\mathbf{A}} \xrightarrow{u} (F_{\mathbf{A}}1/_{l_00=0})_{\mathbf{A}}$$

$$0, 1 \mapsto 0.$$



(Bem.: Wegen 3.7 sind notwendigerweise nicht alle Domains der definierenden Morphismen λ-erzeugbar, weil wegen 4.2(4) in $\mathbf{C}$ notwendigerweise nicht jede gerichtete Vereinigung Colimes ist.) Außerdem sei

$$A := (F_{\mathbf{C}}1/_{l_00=0})_{\mathbf{C}} = (F_{\mathbf{A}}1/_{l_00=0\wedge \bigwedge\limits_{n,n'>0} l_nl_n0=l_{n'}l_{n'}0})_{\mathbf{A}}.$$



A ist nicht endlich vereinigbar: A ist Vereinigung des gerichteten Diagrammes bestehend aus (für jedes $m > 0$):

$$(F_{\mathbf{A}}\{1, ..., m\}/_{\bigwedge\limits_{m>n,n'>0} l_n n = l_{n'} n'})_{\mathbf{A}}.$$

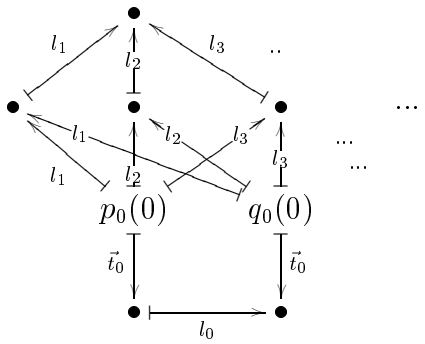
$\hom_{\mathbf{C}}(A, _)$ bewahrt diese Vereinigung nach 4.2(4) nicht, denn es gilt $\operatorname{card} \hom_{\mathbf{C}}(A, A) \geq 1$ (Identität) und (für jedes $m > 0$)

$$\operatorname{card} \hom_{\mathbf{C}}(A, (F_{\mathbf{A}}\{1, ..., m\}/_{\bigwedge\limits_{m>n,n'>0} l_n n = l_{n'} n'})_{\mathbf{A}}) = 0$$

(denn A hat einen l_0-Fixpunkt).

A ist endlich erzeugbar: Zur Eindeutigkeitsbedingung: Es gilt sogar $\operatorname{card} \hom_{\mathbf{C}}(A, C) \leq 1$ für jedes $C \in \mathbf{C}$ weil $A =< 0 >_A$, $l_0(0) = 0$ in A, und weil l_0-Fixpunkte in $\mathbf{C}$-Algebren wegen u eindeutig bestimmt sind.
Zur Existenzbedingung: Sei $(\ C_i \xrightarrow{c_i} D\ )_{i \in I}$ die $\mathbf{A}$-Colimes-Senke zu einem gerichteten Mono-Diagramm, $k \in \hom_{\mathbf{C}}(A, RD)$. Dann hat RD nach Konstruktion A einen l_0-Fixpunkt und es reicht zu zeigen, daß es ein $i \in I$ gibt, sodaß C_i einen l_0-Fixpunkt x hat: Denn dann gibt uns $A \xrightarrow{k'} C_i\ , 0 \mapsto x$ einen wohldefinierten Morphismus, da $C_i \perp f$ (und es gilt $k = c_i \circ k'$ wegen obiger Bemerkung zur Eindeutigkeitsbedingung).
Betrachte die Orthogonalitäts-Reflektions-Konstruktion 2.5 von $B_{i_*} := RD$ aus $B_0 := D$. Sei i_0 minimal, sodaß B_{i_0} einen l_0-Fixpunkt hat (existiert, da RD einen solchen hat). Dann werden $B_1, ..., B_{i_0}$ nicht mithilfe der Morphismen f und u konstruiert, denn deren Domains enthalten bereits l_0-Fixpunkte. Da e ein Mono ist und Monos in $\mathbf{A}$ Pushout-stabil sind (Colimiten sind konkret), entsteht bei der Pushout-Bildung zu einer Spanne $D \xleftarrow{h} \operatorname{dom} e \xrightarrow{e} \operatorname{cod} e$ kein l_0-Fixpunkt. Also ist B_{i_0} konstruiert als Coegalisator $\operatorname{cod} e \underset{q_0}{\overset{p_0}{\rightrightarrows}} B_{i_0-1} \xrightarrow{b_{i_0-1,i_0}} B_{i_0}$ eines Paares mit $p_0 \circ e = q_0 \circ e$ und $l_0(\vec{t}_0(p_0(0))) = \vec{t}_0(q_0(0))$ für einen Term $\vec{t}_0$ (nach Konstruktion eines Coegalisators in $\mathbf{Alg}\,\mathbf{\Sigma}$: wegen $\operatorname{cod} e =< 0 >_{\operatorname{cod} e}$

ist $< (p_0(0), q_0(0) >_{B^2_{i_0-1}})$ die Kongruenz):



Wir definieren folgende Menge von Paaren von Termen:

$$R_0 := \{(l_0 \circ \vec{t}_0, \vec{t}_0)\} \cup \{(l_n, l_n) : n \in \mathbb{N}_{>0}\} \cup \{(l_n \circ l_n, l_1 \circ l_1) : n \in \mathbb{N}_{>1}\}.$$

Sei nun i_1 minimal, sodaß für $C_0 := (F_{\mathbf{A}}2/ \bigwedge_{(\vec{s},\vec{s}') \in R_0} \vec{s}(0)=\vec{s}'(1))_{\mathbf{A}}$

$$C_0 \xrightarrow{f_0} B_{i_0-1}\ ,$$

$$0 \mapsto p_0(0), 1 \mapsto q_0(0)$$

durch $B_{i_1} \xrightarrow{b_{i_1,i_0-1}} B_{i_0-1}$ faktorisiert (i_1 existiert nach vorangegangener Überlegung). Analog zu obigem Argument haben wir dann wiederum einen Coegalisator $\operatorname{cod} e \underset{q_1}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} B_{i_1-1} \xrightarrow{b_{i_1-1,i_1}} B_{i_1}$ eines Paares mit $p_1 \circ e = q_1 \circ e$, sodaß es einen Term $\vec{t}_1$ gibt mit $\vec{t}_1(p_1(0)) = \vec{s}(p_0(0))$ und $\vec{t}_1(q_1(0)) = \vec{s}'(q_0(0))$ für ein $(\vec{s}_0, \vec{s}_0') \in R_0$ und $\vec{t}_1(p_1(0)) \neq \vec{t}_1(q_1(0))$ (nach Minimalität von i_1 und Konstruktion des Kerns). Dann definieren wir $C_1 \xrightarrow{f_1} B_{i_1-1}$ analog zu $C_0 \xrightarrow{f_0} B_{i_0-1}$: Seien

$$\begin{aligned}
R_1^{0,1} &:= R_0 \setminus \{(\vec{s}_0, \vec{s}_0')\},\\
R_1^{2,3} &:= \{(l_n, l_n) : n \in \mathbb{N}_{>0}\} \cup \{(l_n \circ l_n, l_1 \circ l_1) : n \in \mathbb{N}_{>1}\},\\
R_1^{0,2} &:= \{(\vec{s}_0, \vec{t}_1)\},\\
R_1^{1,3} &:= \{(\vec{s}_0', \vec{t}_1)\},\\
C_1 &:= (F_{\mathbf{A}}4/ \bigwedge_{(i,j) \in \{(0,1),(2,3),(0,2),(1,3)\}, (\vec{s},\vec{s}') \in R_1^{i,j}} \vec{s}(i)=\vec{s}'(j))_{\mathbf{A}}.
\end{aligned}$$

Sei weiter $f_1(0) = p_0(0)$, $f_1(1) = q_0(0)$, sowie $f_1(2) = p_1(0)$ und $f_1(3) = q_1(0)$. Und sei i_2 minimal, sodaß f_1 durch $B_{i_2} \xrightarrow{b_{i_2,i_1-1}} B_{i_1-1}$ faktorisiert.

Mit diesem Konstruktionsprozess fahren wir dann induktiv fort: Für $i < n$ seien

$$\begin{aligned}
R_{n+1}^{2i,2i+1} &:= R_n^{2i,2i+1},\\
R_{n+1}^{2n,2n+1} &:= R_n^{2n,2n+1} \setminus \{(\vec{s}_n, \vec{s}'_n)\},\\
R_{n+1}^{2n+2,2n+3} &:= \{(l_n, l_n) : n \in \mathbb{N}_{>0}\} \cup \{(l_n \circ l_n, l_1 \circ l_1) : n \in \mathbb{N}_{>1}\},\\
R_{n+1}^{2n,2n+2} &:= \{(\vec{s}_n, \vec{t}_{n+1})\},\\
R_{n+1}^{2n+1,2n+3} &:= \{(\vec{s}'_n, \vec{t}_{n+1})\}.
\end{aligned}$$

Definiere damit

$$C_{n+1} := (F_{\mathbf{A}}(2n+2)/ \bigwedge_{\substack{(i,j)\in\{(2n,2n+2),(2n+1,2n+3)\}\cup\\ \{(2k,2k+1):0\le k\le n+1\},(\vec{s},\vec{s}')\in R_{n+1}^{i,j}}} \vec{s}(i)=\vec{s}'(j))_{\mathbf{A}}.$$

Und sei $C_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} B_{i_{n+1}-1}$ definiert durch $f_{n+1}(2k) = p_k(0)$ und $f_{n+1}(2k+1) = q_k(0)$ für $k \in \mathbb{N}_{\le n+1}$. Sei i_{n+2} minimal, sodaß f_{n+1} durch $B_{i_{n+2}} \xrightarrow{b_{i_{n+2},i_{n+1}-1}} B_{i_{n+1}-1}$ faktorisiert.
Da **Ord** wohlgeordnet ist, gibt es dabei ein $n \in \mathbb{N}$ mit $i_{n+1} = 0$, das heißt f_n faktorisiert durch $B_0 = RD$. Dann ist $\operatorname{dom} f_n = C_n$ nach Konstruktion endlich erzeugt, und damit endlich erzeugbar [AR 3.11], also faktorisiert f_n durch C_i für ein $i \in I$: $f_n = c_i \circ f'$. Da nun aber $C_i \perp e$ gilt, folgt $f'(2k) = f'(2k+1)$ für alle $k \in \mathbb{N}_{<n}$, insbesondere hat C_i einen l_0-Fixpunkt.

3 $\Rightarrow$ **5:** Dies folgt aus 2.11(3).

3 $\overset{Q}{\not\Rightarrow}$ **6** (Quasivarietät): Es reicht, ein Beispiel für eine Quasivarietät $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{A} := \mathbf{Alg}\,\tau$ anzugeben, die abgeschlossen unter Colimiten λ-gerichteter Monodiagramme, aber nicht λ-direktiv ist (ein solches gibt es bei 3.5(4)). $F_{\mathbf{C}}1$ ist dann λ-erzeugbar. Es gibt weiter einen $\mathbf{A}$-Colimes, dessen Reflektion r kein $\mathbf{A}$-Monomorphismus (=injektiver Morphismus) ist (denn da Quasivarietäten Unterobjekt-abgeschlossen sind, sind monomorphe Reflektionen schon Isomorphismen, $\mathbf{C}$ wurde aber ja als nicht λ-direktiv vorausgesetzt). Da aber λ-gerichtete $\mathbf{A}$-Colimiten konkret sind, und da Ur der in 4.1(6) bezeichnete (eindeutig bestimmte) faktorisierende Morphismus ist (und wegen $\hom_{\mathbf{C}}(F_{\mathbf{C}}1, _) \cong U_{\mathbf{C}}$), ist $F_{\mathbf{C}}1$ nicht schwach vom Typ λ.

4 $\overset{m}{\Rightarrow}$ **3** gilt wegen 5 $\overset{m}{\Rightarrow}$ 3.

4 $\overset{Q}{\not\Rightarrow}$ **3** (Quasivarietät): Dies gilt wegen 5 $\overset{S}{\Rightarrow}$ 4 und 5 $\overset{Q}{\not\Rightarrow}$ 3.

4 $\Rightarrow$ **5:** Dies gilt wegen 4.2(4), da λ-gerichtete Colimiten mit Mono-Transformationen λ-gerichtete Vereinigungen sind (denn Colimes-Senken sind extremal-epimorph).

4 $\overset{Q}{\not\Rightarrow}$ **6** (Quasivarietät): Dies folgt aus 3 $\overset{Q}{\not\Rightarrow}$ 6 und 3 $\overset{S}{\Rightarrow}$ 4.

5 $\overset{m}{\Rightarrow}$ **3** (Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten, abgeschlossen unter λ-gerichteten Colimiten von Monodiagrammen): Dies gilt nach 3.6.

5 $\overset{Q}{\not\Rightarrow}$ **3** (Quasivarietät): Nach 3.7(2) reicht es, eine Quasivarietät $\mathbf{C}\subseteq\mathbf{Alg}\,\tau$ anzugeben, die nicht abgeschlossen unter Colimiten von λ-gerichteten Mono-Diagrammen ist (dafür s. 3.4(7) Bew. oder 3.5(3)), dann ist $F_{\mathbf{C}}1$ nicht λ-erzeugbar, aber schwach λ-erzeugbar.

5 $\overset{S\vee m}{\Rightarrow}$ **4** (Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten, abgeschlossen unter Unterobjekten oder λ-gerichteten Colimiten von Monodiagrammen): Dies gilt wegen 4.2(4) und 3.7.

5 $\overset{D}{\Rightarrow}$ **6** (λ-direktive reflektive Unterkategorie): Dies folgt aus [Fa75 1-4 a$\Rightarrow$ b] (da λ-direktive reflektive Unterkategorien eines λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ lokal λ-präsentierbar sind) und 5 $\overset{m}{\Rightarrow}$ 3.

5 $\Rightarrow$ **7:** Dies folgt aus 4.2(5).

6 $\overset{D'}{\Rightarrow}$ **3** (λ-direktive reflektive Unterkategorie mit starken Epimorphismen): Dies folgt aus [Fa75 1-4 b$\Rightarrow$a].

6 $\overset{S'}{\Rightarrow}$ **5** (λ-orthogonale Unterkategorie mit starken Epimorphismen): Dies folgt aus 6 $\overset{S'}{\Rightarrow}$ 3 und 3.7(2).

6 $\overset{V}{\not\Rightarrow}$ **5** (Varietät): $\mathbb{Q}\in\mathbf{Rng}$ ist schwach vom Typ $\aleph_0$ nach [Fa75 1-4 d$\Rightarrow$b], da es einen Epimorphismus $\mathbb{Z}\hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow\mathbb{Q}$ gibt [AHS 7.40(5)] und $\mathbb{Z}$ endlich erzeugbar ist [AR 3.11]. $\mathbb{Q}$ ist nicht schwach endlich erzeugbar, weil es gerichteter Colimes seiner Unterringe $<\{1/n : 1\leq n\leq m\}>_{\mathbb{Q}}$ (für $m\geq 1$) ist, aber kein Retrakt eines dieser Unterringe.

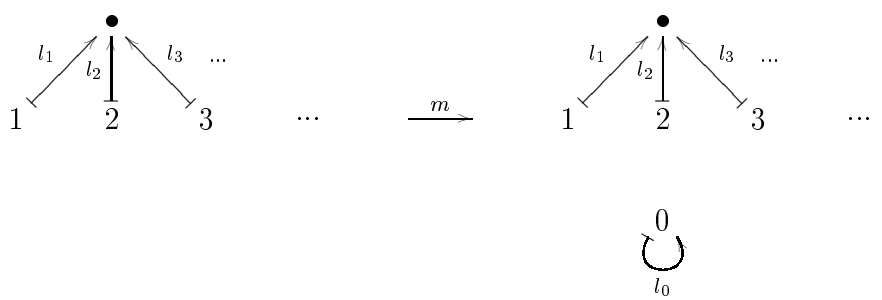
7 $\overset{Q}{\not\Rightarrow}$ **3,7** $\overset{m}{\not\Rightarrow}$ **3** (Quasivarietät oder Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten, abgeschlossen unter λ-gerichteten Colimiten von Monodiagrammen): Für Quasivarietäten folgt dies aus 5$\Rightarrow$7 und 5 $\overset{Q}{\not\Rightarrow}$ 3, für unter λ-gerichteten Colimiten von Monodiagrammen abgeschlossene Unterkategorien mit kanonischen freien Objekten aus 3$\Rightarrow$5 und 7 $\overset{m}{\not\Rightarrow}$ 5.

7 $\overset{S\vee O}{\Rightarrow}$ **5** (Unterobjekt-abgeschlossene Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten oder λ-direktive reflektive Unterkategorie): Sei zunächst $\mathbf{C}$ eine λ-direktive reflektive Unterkategorie und $A \in \mathbf{C}$ vom $\mathbf{C}$-Typ λ. Nach 3.8 ist die Senke der Inklusionen der λ-erzeugbaren Unterobjekte von A eine Colimes-Senke (zu dem λ-gerichteten Mono-Diagramm der λ-erzeugbaren Unterobjekte). Nach Definition "Typ λ" ist eine dieser Inklusionen ein Isomorphismus und A somit λ-erzeugbar, also erst recht schwach λ-erzeugbar. Sei nun $\mathbf{C}$ eine Unterobjekt-abgeschlossene Unterkategorie eines λ-ären $\mathbf{A}{:=}\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$. Sei $A \in \mathbf{C}$ vom $\mathbf{C}$-Typ λ. Dann ist A vom $\mathbf{A}$-Typ λ, da $\mathbf{C}$ abgeschlossen unter Unterobjekten ist, und eine in $\mathbf{C}$ enthaltene $\mathbf{A}$-Colimes-Senke eine $\mathbf{C}$-Colimes-Senke ist. Nach obigem Argument ist A dann schwach $\mathbf{A}$-λ-erzeugbar und somit schwach $\mathbf{C}$-λ-erzeugbar, da eine Unterobjekt-abgeschlossene Unterkategorie von $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ abgeschlossen unter Colimiten mit Monotransformationen ist (3.7(2)).

7 $\overset{m}{\not\Rightarrow}$ **5** (Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten, abgeschlossen unter λ-gerichteten Colimiten von Monodiagrammen): Sei $\lambda := \aleph_0$ und $\mathbf{A}{:=}\mathbf{Alg}\,\mathbf{\Sigma}$ für $\Sigma := \{l, k\}$ (unär). Sei $\mathbf{C}$ die Unterkategorie, die aus den $\mathbf{A}$-relativ freien Objekten, sowie $A := (F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}/\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} ln{=}n)_{\mathbf{A}}$, $C := (F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}/\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} ln{=}kn{=}n)_{\mathbf{A}}$ und $C_m := (F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}_{\leq m}/\bigwedge_{n\leq m} ln{=}kn{=}n)_{\mathbf{A}}$ für $m \in \mathbb{N}$ besteht. $\mathbf{C}$ hat kanonische freie Objekte und ist abgeschlossen unter Colimiten von gerichteten Monodiagrammen (analog zum Beweis von 4.8: b $\overset{m}{\not\Rightarrow}$ d). A ist vom Typ $\aleph_0$ in $\mathbf{C}$, aber $\hom_{\mathbf{C}}(A, _)$ bewahrt nicht den Colimes (mit Monotransformationen) C der C_m ($m \in \mathbb{N}$).

7 $\overset{r}{\not\Rightarrow}$ **5** (reflektive Unterkategorie): Sei $\lambda := \aleph_0$, $\mathbf{A}{:=}\mathbf{Alg}\,\mathbf{\Sigma}$ mit $\Sigma := \{l_n : n \in \mathbb{N}\}$, sei

$$(F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}_{>0}/\bigwedge_{n,n'>0} l_n n{=}l_{n'}n')_{\mathbf{A}} \xrightarrow{m} (F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}/_{l_0 0=0\wedge \bigwedge_{n,n'>0} l_n n=l_{n'}n'})_{\mathbf{A}}\,,$$
$$n \mapsto n$$



Sei $\mathbf{C} := \{m\}^{\perp}$. Dann ist $F_{\mathbf{C}}1$ nicht schwach endlich erzeugbar (denn $F_{\mathbf{C}}1 \xrightarrow{0\mapsto 0} \operatorname{cod} m$ faktorisiert durch keinen der Objekte $((F_{\mathbf{A}}\{1,...,m\}/\bigwedge_{1\le n,n'\le m} l_n n = l_{n'} n')_{\mathbf{A}})_{m\ge 1}$, deren $\mathbf{C}$-Colimes $\operatorname{cod} m$ ist).
$F_{\mathbf{C}}1$ ist aber vom Typ $\aleph_0$: Sei $F_{\mathbf{C}}1$ $\mathbf{C}$-Colimes eines gerichteten Monodiagramms D von Unterobjekten $S_i \xrightarrow{s_i} F_{\mathbf{C}}1$ $(i \in I)$. Dann ist der $\mathbf{A}$-Colimes von D ein $\mathbf{A}$-Unterobjekt von $F_{\mathbf{C}}1$ (siehe 1.10(1) und 3.7(1)). $\mathbf{C}$ enthält aber alle $\mathbf{A}$-Unterobjekte von $F_{\mathbf{C}}1$, denn diese sind orthogonal zu m, da es keinen Morphismus von $\operatorname{cod} m$ nach $F_{\mathbf{C}}1$ (und somit auch nicht zu einem Unterobjekt) gibt. Also ist $F_{\mathbf{C}}1 = F_{\mathbf{A}}1$ auch der $\mathbf{A}$-Colimes von D. Da $F_{\mathbf{A}}1$ vom Typ $\aleph_0$ ist (weil es endlich erzeugbar, da endlich erzeugt (siehe 4.8) ist), gibt es ein $i \in I$, sodaß s_i ein $\mathbf{A}$-Isomorphismus ist, und somit auch ein $\mathbf{C}$-Isomorphismus.

7 $\overset{D}{\Rightarrow}$ **6** (λ-äre Quasivarietät): Denn es gilt 7 $\overset{D}{\Rightarrow}$ 5 und 5 $\overset{D}{\Rightarrow}$ 6.

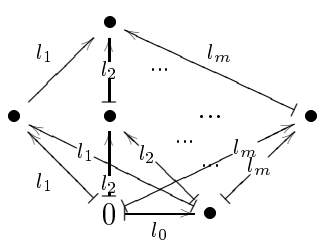
7 $\overset{m}{\not\Rightarrow}$ **6,7** $\overset{Q}{\not\Rightarrow}$ **6** (Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten, abgeschlossen unter λ-gerichteten Colimiten von Monodiagrammen, oder Quasivarietät): Dies folgt aus 2 $\overset{m}{\not\Rightarrow}$ 6 bzw. 2 $\overset{Q}{\not\Rightarrow}$ 6.

Alle übrigen Implikationen oder Gegenbeispiele ergeben sich direkt aus den Definitionen oder durch Kombination der obenstehenden. \$

4.5 Bemerkung

(1) In 3 $\overset{r}{\not\Rightarrow}$ 4 ist A leider nicht endlich-klein: A ist $\mathbf{C}$-Colimes (wegen $\mathbf{C} \perp e$, Eindeutigkeitsbedingung) von

$$(F_{\mathbf{A}}1/\bigwedge_{0<n,n'\le m} (l_n 0 = l_n l_0 0 \wedge l_n l_n 0 = l_{n'} l_{n'} 0))_{\mathbf{A}} :$$



(für $m > 0$), aber kein Retrakt eines dieser Objekte. Dieses Beispiel bringt also keine Entscheidung der Frage, ob 2 $\overset{r}{\Rightarrow}$ 4 gilt.

4.2 Kleinheitsbedingungen II

Hier werden die Implikationen zwischen Kleinheitsbedingungen an ein Objekt untersucht, die über extremale bzw. reguläre Epimorphismen (bzw. Epi-Senken) mit dem betreffenden Objekt als Codomain definiert werden (in diesem Sinne interne Bedingungen, auch wenn sie zum Teil den Vergißfunktor beinhalten). Die Begriffe der λ-Präsentiertheit und λ-Erzeugtheit sind die historisch ersten der in dieser Arbeit behandelten Kleinheitsbedingungen (die Präsentation durch Erzeugende und Relationen ist ein klassisches Konzept der Gruppentheorie). Das Konzept "λ-kompakt" basiert darauf, daß eine Algebra (im algebraischen Sinne) genau dann endlich erzeugt ist, wenn sie in ihrem Unteralgebraverband kompakt ist [P98].
Zwei der Implikationen werden der Übersichtlichkeit halber in zwei Unterabschnitten gezeigt. Dazu wird im ersten Unterabschnitt gezeigt, daß freie Objekte über Mengen von Kardinalität kleiner als λ in λ-orthogonalen Unterkategorien von λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ eine Art Projektivitätsbedingung erfüllen. Aus der Gültigkeit der in diesem Unterabschnitt untersuchten Implikation ergeben sich auch Bedingungen, unter denen die in [GU 7.7e] aufgeworfene Fragestellung einer einfachen Charakterisierung von λ-präsentierbaren Objekten (mittels eines Coegalisator von λ-kleinen Coprodukten eines λ-präsentierbaren regulären Generators) positiv beantwortet wird.
Zum Beweis der Implikation im zweiten Unterabschnitt wird gezeigt, daß die Zerlegung eines beliebigen Morphismus in extremale Epimorphismen mittels Komposition und Bildung von Colimiten von Ketten in covollständigen Kategorien mit Pullbacks [GU 1.5] λ-gerichtete Colimiten bewahrt (zumindest im benötigten Spezialfall der λ-direktiven reflektiven Unterkategorien von λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$).

4.6 Definition
Wir betrachten im folgenden folgende Kleinheitsbedingungen an ein Objekt A eines $\mathcal{S}$-Konstruktes $\mathbf{A}$ (nicht notwendigerweise mit freien Objekten):

(a) $\operatorname{card} A < \lambda$

(b) **λ-präsentiert**: Es existieren $X, Y \in \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$ mit $\operatorname{card} X, \operatorname{card} Y < \lambda$, freie Objekte FX, FY und ein Coegalisator $FY \rightrightarrows FX \longrightarrow A$ [AR p143].

(c) **λ-erzeugt**: Es existieren $X \in \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$ mit $\operatorname{card} X < \lambda$, ein freies Objekt FX und ein regulärer Epimorphismus $FX \longrightarrow A$ (vgl. [AR p143]).

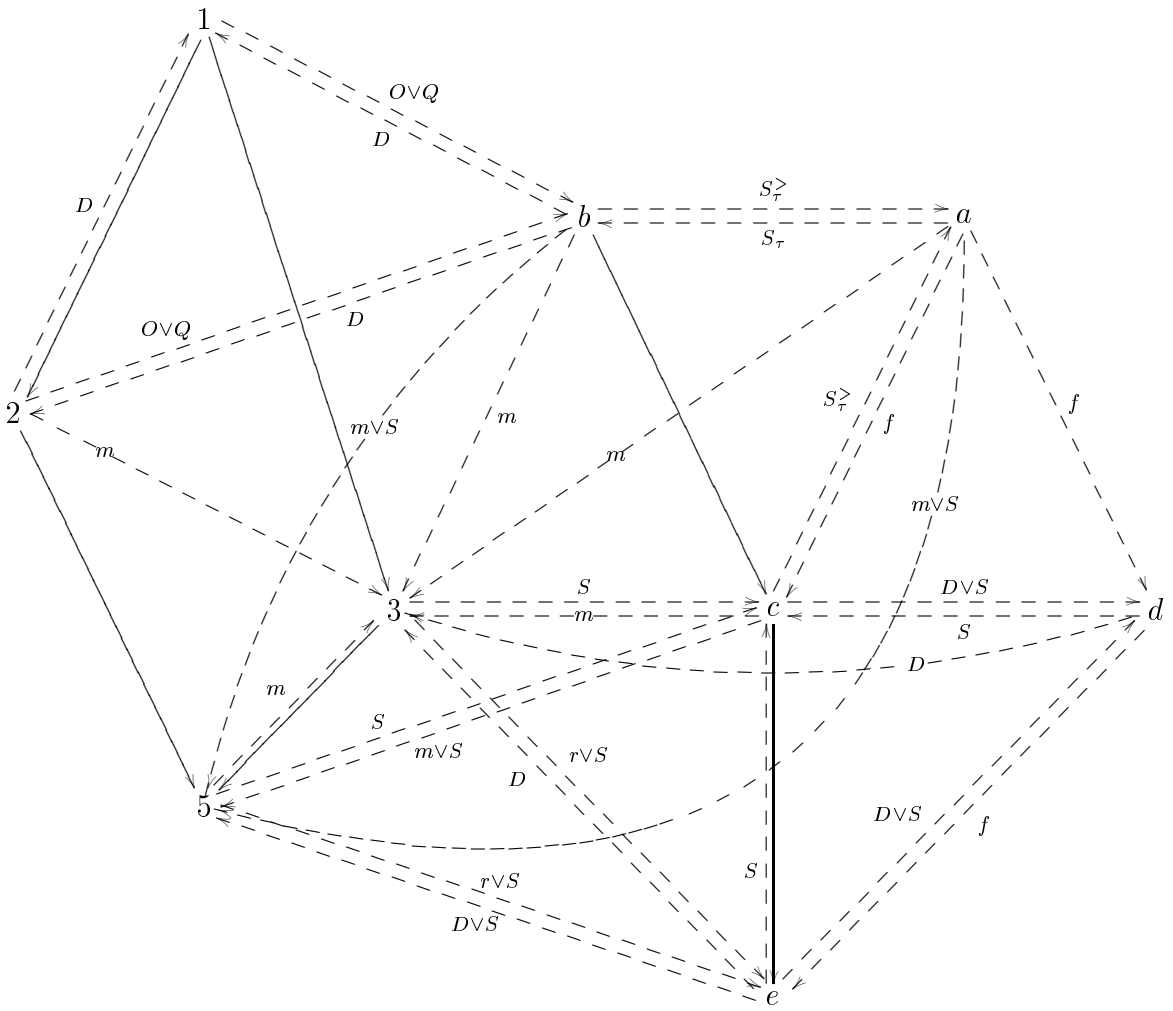
(*d*) λ**-kompakt**: Für jede extremal-epimorphe Senke $(\ A_i \longrightarrow A\ )_{i\in I}$ existiert $I'\subseteq I$ mit $\operatorname{card} I' < \lambda$, sodaß $(\ A_i \longrightarrow A\ )_{i\in I'}$ extremal-epimorph ist [P98].

(*e*) **extremal** λ**-erzeugt**: Es existiert $X \in \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$ mit $\operatorname{card} X < \lambda$ und ein extremal erzeugender Morphismus $(\ X \longrightarrow A\ ) \in \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$ (vgl. [H71 p277]).

4.7 Bemerkung
Zu (e): **A** habe freie Objekte. Dann ist A nach [AHS 8.36] genau dann extremal λ-erzeugt, wenn $X \in \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$ mit $\operatorname{card} X < \lambda$ existiert, sowie ein extremaler Epimorphismus $F_{\mathbf{A}}X \longrightarrow A$.

In der folgenden Proposition werden die Beziehungen zwischen den oben erwähnten (und einigen der in 4.1 definierten) Kleinheitsbedingungen in Kategorien von λ-ären Algebren untersucht. (Die Notation ist die gleiche wie in 4.4, man beachte jedoch, daß die betrachteten Kategorien alle konkret über **Set** sein müssen, damit die Bedingungen überhaupt definiert sind.) Offen bleibt, ob 1 oder 2 in reflektiven Unterkategorien d implizieren.
Zusätzlich zu der Hierarchie in 3.4 sind zur besseren Einordnung der Kleinheitsbedingung a Implikationen unter den Bedingungen S_τ und $S_\tau^>$ angegeben. S_τ bedeutet hier eine unterobjekt-abgeschlossene Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten eines finitären (!) $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$, mit der zusätzlichen Bedingung $\tau < \lambda$ für die Signatur τ. $S_\tau^>$ bedeutet darüberhinaus $\lambda > \aleph_0$.

4.8 Proposition
Nach der vorhergehenden Erläuterung gelten die folgenden Beziehungen zwischen den Kleinheitsbedingungen (1)-(5) und (a)-(e):



Beweis
Sei $\mathbf{C}$ eine Unterkategorie (mit der jeweils angegebenen Eigenschaft) eines λ-ären $\mathbf{A}{:=}\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$, $A \in \mathbf{C}$. Für eine Aufstellung der Bedingungen an Unterkategorien und Objekte siehe A.

1 $\overset{A}{\not\Rightarrow}$ **a** (λ-äres $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$): Betrachte zum Beispiel $\mathbb{Z} \in \mathbf{Ab}$ (siehe auch [AR 1.14(5)]).

1 $\overset{S}{\not\Rightarrow}$ **b** (unterobjekt-abgeschlossene Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten): Sei $\mathbf{A}{:=}\mathbf{Alg}\,\mathbf{\Omega}$ mit $\Omega := \{c_n : n \in \mathbb{N}\}$ (konstante Operationen), sei $\mathbf{C}$ die Unterkategorie bestehend aus den freien $\mathbf{A}$-Algebren, sowie $A := (F_{\mathbf{A}}\emptyset/\bigwedge_{n>0} c_n{=}c_1)_{\mathbf{A}}$ und $A_m := (F_{\mathbf{A}}\emptyset/\bigwedge_{n\leq m} c_n{=}c_0)_{\mathbf{A}}$ (für alle $m > 0$). Dann ist $\mathbf{C}$ unterobjektabgeschlossen mit kanonischen freien Objekten. A

ist endlich präsentierbar, da für $A \neq C \in \mathbf{C}$ $\hom_{\mathbf{C}}(A,C) = \emptyset$ gilt, und da jedes gerichtete Diagramm mit $\mathbf{C}$-Colimes A auch A (als terminales Objekt) enthält, da, für jedes $m > 0$, $\hom_{\mathbf{C}}(A_m, A) = \emptyset$ gilt und in einem Colimes freier Objekte alle Konstanten verschieden sind. A ist aber nicht endlich präsentiert: Für endliche $X, Y \in \mathbf{Set}$ kann ein Diagramm $FY \rightrightarrows FX \longrightarrow A$ kein $\mathbf{C}$-Coegalisator sein, da jede endliche Menge von Gleichungen, die in A erfüllt sind, auch in A_m für ein geeignetes m erfüllt sind, aber $\hom_{\mathbf{C}}(A, A_m) = \emptyset$ gilt.

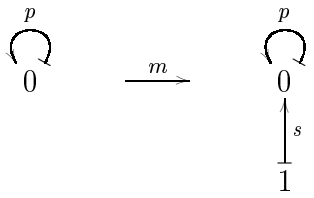
1 $\overset{D}{\not\Rightarrow}$ **c** (reflektive Unterkategorie): Das Objekt A in der direktiven reflektiven Unterkategorie von $\mathbf{Alg}\,\mathbf{\Sigma}$ im Beweis von 4.23 ist endlich präsentierbar, aber nicht endlich erzeugt (siehe dort). (Dies legt nahe, daß der letzte Absatz von [BH p160] zum Teil etwas mißverständlich formuliert ist.)

1 $\overset{m}{\not\Rightarrow}$ **e** (Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten, abgeschlossen unter λ-gerichteten Colimiten von Monodiagrammen): Sei $\mathbf{A}{:=}\mathbf{Alg}\,\mathbf{\Omega}$ mit $\Omega := \{0, -, +\}$ und $\mathbf{C} := \mathbf{TfAb} \cup \{{}^{\mathbb{N}}\mathbb{Z}_2\}$, sowie $A =^{\mathbb{N}} \mathbb{Z}_2$. $\mathbf{C}$ hat kanonische freie Objekte (da freie abelsche Gruppen torsionsfrei sind) und ist λ-direktiv, da jeder Homomorphismus ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{Z}_2 \longrightarrow C$ (für torsionsfreies C) trivial ist, und somit ein gerichtetes Diagramm in $\mathbf{C}$, daß ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{Z}_2$ enthält, ohne Einschränkung ein terminales Objekt $\{0\}$ oder ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{Z}_2$ hat (und dasselbe Objekt somit sowohl als $\mathbf{Ab}$- als auch als $\mathbf{C}$-Colimes). Und ein gerichteter $\mathbf{Ab}$-Colimes von torsionsfreien abelschen Gruppen ist torsionsfrei, denn $\mathbf{TfAb}$ ist eine finitäre Quasivarietät [AR 3.20(2)]. ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{Z}_2$ ist $\mathbf{C}$-endlich präsentierbar (ebenfalls weil jeder Homomorphismus ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{Z}_2 \longrightarrow C$ für torsionsfreies C trivial ist), aber nicht extremal endlich-erzeugbar: Sei $(X \xrightarrow{g} A) \in \mathbf{Set}$ mit $\operatorname{card} X < \lambda$. Dann gibt es ein endliches $N \subseteq \mathbb{N} \subseteq A$ mit $g[X] \subseteq < N >_A$. Definiere $A \xrightarrow{f_i} A$ für $i \in 2$ durch $f_i(\mu_n(1)) = \mu_0(1)$ für $n \in N$ und $f_i(\mu_n(1)) = \mu_i(n)$ sonst (jeweils für $i \in 2$ und die Coprodukt-Injektionen μ_n). Dann gilt $f_0 \circ g = f_1 \circ g$.

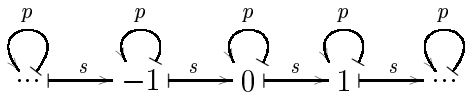
2 $\overset{O \vee Q}{\Rightarrow}$ **b** (λ-orthogonale Unterkategorie oder Quasivarietät): Siehe 4.2.1.

3 $\overset{Q}{\not\Rightarrow}$ **c** (λ-orthogonale Unterkategorie): Sei $\mathbf{C}{:=}\mathbf{Alg}\,\mathbf{\Sigma}$ mit $\lambda := \aleph_0$ und $\Sigma := \{p, s\}$ (unäre Operationen). Sei $\mathbf{C} := \{m\}^{\perp}$ für die Einbettung

$(F_{\mathbf{A}}1/_{p0=0})_{\mathbf{A}} \overset{m}{\hookrightarrow} (F_{\mathbf{A}}2/_{p0=0=s1})_{\mathbf{A}}$:



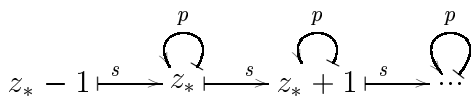
und sei $A := (F_{\mathbf{C}}\mathbb{Z}/_{\bigwedge\limits_{z\in\mathbb{Z}} pz=z\wedge sz=z+1})_{\mathbf{C}}$:



A ist $\mathbf{C}$-endlich erzeugbar: Sei $(\ C_i \xrightarrow{c_i} C\ )_{i\in I}$ $\mathbf{C}$-Colimes zu einem λ-gerichteten Mono-Diagramm, $A \xrightarrow{f} C \in \mathbf{C}$. Da die gerichteten $\mathbf{C}$-Colimiten konkret sind (denn die gerichteten $\mathbf{A}$-Colimiten sind es [AHS 11.28] und $\mathbf{C}$ ist direktiv), gibt es ein $i \in I$ und ein $x_0 \in C_i$ mit $c_i(x_0) = 0$. Es gilt $c_i(p(x_0)) = c_i(x_0)$ (c_i ist Homomorphismus) und c_i ist Monomorphismus (3.6), also gilt $p(x_0) = x_0$ (und entsprechend $p(s(x_n)) = s(x_n)$ für $x_n := s^n(x_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$). Wegen $C_i \perp m$ existiert dann ein $x_{-1} \in C_i$ mit $s(x_{-1}) = x_0$, und es gilt $c_i(x_{-1}) = -1$, da -1 der einzige s-Vorgänger von 0 in A ist. Induktiv erhält man so $x_z \in C_i$ (für $z \in \mathbb{Z}$) mit $c_i(x_z) = z$, $p(x_z) = x_z$ und $s(x_z) = x_{z+1}$. Also faktorisiert f durch C_i, da Monomorphismen in $\mathbf{C}$ initial sind (1.10(1)).

A ist nicht $\mathbf{C}$-endlich erzeugt: Sei $F_{\mathbf{C}}X \xrightarrow{g} A$ ein $\mathbf{C}$-Morphismus mit endlichem X. In $F_{\mathbf{C}}X = F_{\mathbf{A}}X$ ist jedes Element Σ-Term in X, daher existiert ein $z_* \in \mathbb{Z}$, sodaß $g[F_{\mathbf{C}}X] \subseteq < z_* >_A$. Sei

$$A' := (F_{\mathbf{C}}\mathbb{Z}_{\geq z_*-1}/_{s(z_*-1)=z_*\wedge \bigwedge\limits_{z\geq z_*} pz=z\wedge sz=z+1})_{\mathbf{C}} :$$

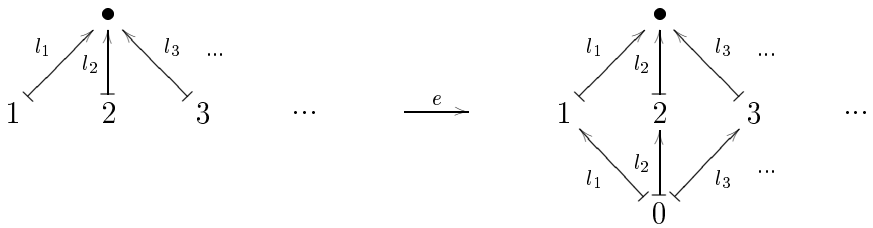


Definiere $F_{\mathbf{C}}X \xrightarrow{g'} A'$ so, daß für $x \in X$ $g'(x)$ das Element in $\mathbb{Z} \subseteq A'$ ist, das $g(x) \in \mathbb{Z} \subseteq A$ entspricht. Dann erfüllt A' alle Gleichungen, die in $g[F_{\mathbf{C}}X] \subseteq A$ gelten (das heißt, es gilt $\forall t, t' \in \operatorname{Mor}\mathbf{C} : g \circ t = g \circ t' \Rightarrow g' \circ t = g' \circ t'$). Wenn g ein regulärer Epimorphismus wäre, müßte es also einen Morphismus h mit $h \circ g = g'$ geben. Dies ist aber nicht der Fall, da $z_* - 1 \in A'$ nicht im Bild von s ist.

3 $\overset{r}{\not\Rightarrow}$ **d** (reflektive Unterkategorie): Sei $\mathbf{A}{:=}\mathbf{Alg}\,\mathbf{\Sigma}$ mit $\lambda := \aleph_0, \Sigma := \{l_n : n \in \mathbb{N}\}$ (unäre Operationen) und $\mathbf{C} := \{e, f\}^\perp$, wobei:

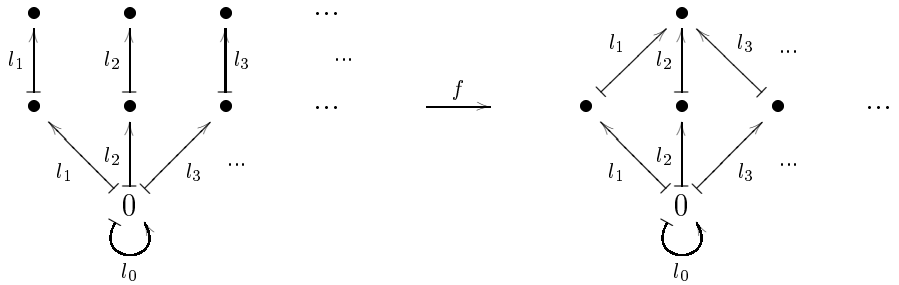
$$(F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}_{>0}/\bigwedge_{n,n'>0} l_n n = l_{n'} n')_{\mathbf{A}} \xrightarrow{e} (F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}/\bigwedge_{n,n'>0} l_n 0 = n \wedge l_n n = l_{n'} n')_{\mathbf{A}}$$

$$n \mapsto n,$$



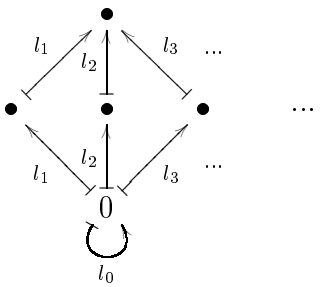
$$(F_{\mathbf{A}}1/_{l_0 0 = 0})_{\mathbf{A}} \xrightarrow{f} (F_{\mathbf{A}}1/_{l_0 0 = 0 \wedge \bigwedge_{n,n'>0} l_n l_n 0 = l_{n'} l_{n'} 0})_{\mathbf{A}}$$

$$0 \mapsto 0,$$



Außerdem sei

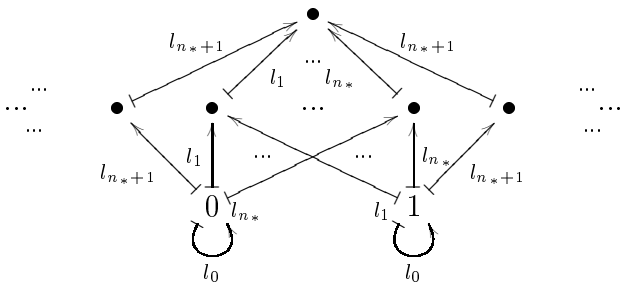
$$A := (F_{\mathbf{C}}1/_{l_0 0 = 0})_{\mathbf{C}} = (F_{\mathbf{A}}1/_{l_0 0 = 0 \wedge \bigwedge_{n,n'>0} l_n l_n 0 = l_{n'} l_{n'} 0})_{\mathbf{A}}.$$



(Vergleiche 4.4: 3 $\overset{r}{\not\Rightarrow}$ 4, beachte jedoch, daß das dortige u fortgelassen werden muß, weil sonst A endlich kompakt ist (siehe 4.9(6)). Die Bedingung $l_0(0) = 0$ in dom f und der Definition von A ist nicht notwendig, vereinfacht

aber die Darstellung.)
Das Objekt A ist dann per Definition **C**-endlich präsentiert. Es ist aber nicht **C**-endlich kompakt, da die (wegen der Orthogonalität zu e) **C**-extremale Epi-Senke $(F_{\mathbf{A}}1 \xrightarrow{e_n:0\mapsto l_n(0)} A)_{n>0}$ keine extremal-epimorphe endliche Teil-Senke besitzt: Sei eine Teil-Senke durch endliches $N\subseteq\mathbb{N}$ gegeben, sei $n_* = \max N$. Definiere

$$A_{n_*} := (F_{\mathbf{A}}2/_{l_0 0=0 \wedge l_0 1=1 \wedge \bigwedge\limits_{n,n'>0,i\in 2} l_n l_n(i)=l_{n'}l_{n'}(i) \wedge \bigwedge\limits_{1\le n\le n_*} l_n 0=l_n 1})_{\mathbf{A}} :$$



Definiere weiter $A \xrightarrow{f_i:0\mapsto i} A_{i_*}$ für $i \in 2$. Dann gilt $f_0 \circ (e_n)_{1\le n\le n_*} = f_1 \circ (e_n)_{1\le n\le n_*}$, aber $f_0 \neq f_1$.

5 $\overset{r\vee S}{\Rightarrow}$ **e** (reflektive oder unterobjekt-abgeschlossene Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten): Sei A schwach λ-är erzeugbar. A ist λ-gerichteter Colimes seiner extremal λ-erzeugten Unterobjekte nach 3.13. Nach Annahme an A faktorisiert id_A durch diese Colimes-Senke, die Einbettung des betreffenden extremal λ-erzeugten Unterobjektes ist also eine Retraktion und somit ein Isomorphismus.

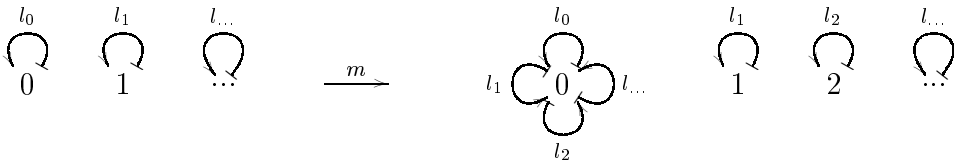
a $\overset{A}{\not\Rightarrow}$ **2** (λ-äres $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$): Sei $\lambda := \aleph_1$ (ist regulär nach 1.2) und $\mathbf{A}{:=}\mathbf{Alg}\,\tau$ mit $\tau := \{f\}$ ($\aleph_0$-stellige Operation - wegen A $\overset{S_\tau}{\Rightarrow}$ b sind notwendigerweise nicht alle Operationen finitär, da $\operatorname{card}\tau < \lambda$ gilt), sei $A := (F_{\mathbf{A}}2/_{\bigwedge\limits_{\vec{a}\in 2^{\mathbb{N}}} f\vec{a}=0})_{\mathbf{A}}$. Dann gilt $\operatorname{card} A < \aleph_1$, aber A ist nicht $\aleph_1$-klein: A ist $\aleph_1$-gerichteter Colimes der $A_N := (F_{\mathbf{A}}2/_{\bigwedge\limits_{\vec{a}\in N} f\vec{a}=0})_{\mathbf{A}}$ (für $N\subseteq 2^{\mathbb{N}}$ mit $\operatorname{card} N < \aleph_1$), aber id_A faktorisiert durch keines der A_N (nach Cantor [Hal p93] und 1.2 gilt $\operatorname{card} 2^{\mathbb{N}} \ge \aleph_1$, und die von $\bigwedge\limits_{\vec{a}\in 2^{\mathbb{N}}} f\vec{a} = 0$ erzeugte Kongruenz wird von keinem $\bigwedge\limits_{\vec{a}\in N} f\vec{a} = 0$ mit $N \overset{\subseteq}{\neq} 2^{\mathbb{N}}$ erzeugt).

a $\overset{m}{\Rightarrow}$ **3** (Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten, abgeschlossen unter λ-gerichteten Colimiten von Monodiagrammen): Sei $(C_i \xrightarrow{c_i} C)_{i\in I}$ eine **C**-Colimes-Senke zu einem λ -gerichteten Mono-Diagramm D, sei

$(A \xrightarrow{f} C) \in \mathbf{C}$. Da Colimiten von λ-gerichteten Mono-Diagrammen in $\mathbf{C}$ konkret sind (nach Annahme an $\mathbf{C}$ und da dies in $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ der Fall ist [AHS 11.28]), existiert für jedes $a \in A$ ein $i_a \in I$, sodaß $f(a) \in c_i[C_i]$. Wegen $\operatorname{card} A < \lambda$ und da D λ-gerichtet ist, existiert ein $i_* \in I$, sodaß $f[A] \subseteq c_{i_*}[C_{i_*}]$. Da c_{i_*} $\mathbf{C}$-Monomorphismus (3.6) und somit $\mathbf{C}$-initial ist (1.10(1)), faktorisiert f durch c_{i_*}. Somit ist A $\mathbf{C}$-λ-erzeugbar.

a $\overset{Q}{\not\Rightarrow}$ **3** (Quasivarietät): Sei $\lambda := \aleph_0$, $\mathbf{A} := \mathbf{Alg}\,\mathbf{\Sigma}$ mit $\Sigma := \{l_n : n \in \mathbb{N}\}$ und $\mathbf{C} := \{m\}^{\perp}$ mit dem Quotienten

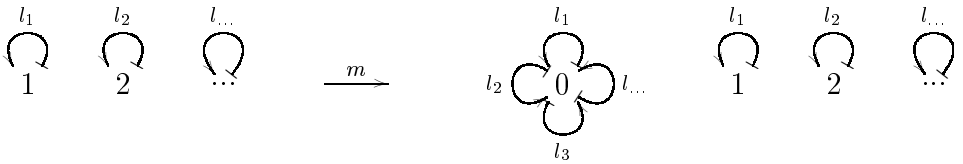
$$(F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}/_{\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} l_n n=n})_{\mathbf{A}} \xrightarrow{m} (F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}/_{\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} (l_n 0=0 \wedge l_n n=n)})_{\mathbf{A}} :$$



(nach 3.5(2) und a $\overset{m}{\Rightarrow}$ 3 ist der Domain von m notwendigerweise nicht $\mathbf{A}$-endlich erzeugbar).
Dann ist $A := (F_{\mathbf{A}}1/_{\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} l_n 0=0})_{\mathbf{A}}$ von endlicher Cardinalität, aber nicht $\mathbf{C}$-endlich erzeugbar: Denn es gibt von A einen Morphismus zum $\mathbf{C}$-Colimes $\operatorname{cod} m$ des gerichteten Diagramms bestehend aus den Objekten $(F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}_{\leq\mu}/_{\bigwedge\limits_{n\leq\mu} l_n n=n})_{\mathbf{A}}$ $(\mu > 0)$, aber zu keinem der Diagrammobjekte.

a $\overset{\eta}{\not\Rightarrow}$ **5** (reflektive Unterkategorie): Sei $\lambda := \aleph_0$, $\mathbf{A} := \mathbf{Alg}\,\mathbf{\Sigma}$ mit $\Sigma := \{l_n : n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ und $\mathbf{C} := \{m\}^{\perp}$ mit der Einbettung

$$(F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}_{>0}/_{\bigwedge\limits_{n>0} l_n n=n})_{\mathbf{A}} \xrightarrow{m} (F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}/_{\bigwedge\limits_{n>0} (l_n 0=0 \wedge l_n n=n)})_{\mathbf{A}} :$$



Dann ist $A := (F_{\mathbf{A}}1/_{\bigwedge\limits_{n>0} l_n 0=0})_{\mathbf{A}}$ von endlicher Cardinalität, aber nicht schwach endlich erzeugbar: Denn es gibt von A einen Morphismus zum $\mathbf{C}$-Colimes $\operatorname{cod} m$ des gerichteten Diagramms bestehend aus den Objekten $(F_{\mathbf{A}}\{1,...,\mu\}/_{\bigwedge\limits_{1\leq n\leq\mu} l_n n=n})_{\mathbf{A}}$ $(\mu > 0)$, aber zu keinem der Diagrammobjekte.

a $\overset{S_\tau}{\Rightarrow}$ **b** (unterobjekt-abgeschlossene Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten eines finitären $\mathbf{Alg}_\mathcal{S}\,\tau$, es gilt $\tau < \lambda$): In einer unterobjektabgeschlossenen Unterkategorie $\mathbf{C}$ ist jedes $a \in F_\mathbf{C}A$ als Term in A darstellbar (da $\mathbf{Alg}_\mathcal{S}\,\tau$ (RegEpi, Monomorphismus)-faktorisierbar ist). Also haben wir den Coegalisator $F_\mathbf{C}Y \underset{p_1}{\overset{p_0}{\rightrightarrows}} F_\mathbf{C}A \xrightarrow{q} A$, mit

$$Y := \{(l_{F_\mathbf{C}A}(\vec{a}), m(q(l_A(\vec{a})))) : (\prod_{i\in I} s_i \xrightarrow{l} s) \in \tau \wedge \vec{a} \in \prod_{i\in I} A_{s_i}\},$$

der Einbettung $A \overset{m}{\hookrightarrow} F_\mathbf{C}A$, der Fortsetzung q von id_A und den Projektionen p_i (man beachte $q \circ m = id_A$ per Definition q). Aus $\operatorname{card} A < \lambda$ folgt $\operatorname{card} Y < \lambda$ mit 1.2, da λ regulär ist, $\mathbf{Alg}_\mathcal{S}\,\tau$ finitär ist und $\operatorname{card}\tau < \lambda$ gilt.

a $\overset{A}{\not\Rightarrow}$ **b** (λ-äres $\mathbf{Alg}_\mathcal{S}\,\tau$): Dies gilt wegen a $\overset{A}{\not\Rightarrow}$ 2 und b $\overset{D}{\Rightarrow}$ 2.

a $\overset{f}{\Rightarrow}$ **c** (Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten): Die Fortsetzung $F_\mathbf{C}A \longrightarrow A$ von id_A ist surjektiv, also ein $\mathbf{A}$-regulärer Epimorphismus [AR 3.4(2)vi] und somit ein $\mathbf{C}$-regulärer Epimorphismus (der Reflektor bewahrt Coegalisatoren und fixiert $\mathbf{C}$-Morphismen (letzteres wegen 1.4(1))).

a $\overset{f}{\Rightarrow}$ **d** (Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten): Sei $(A_i \xrightarrow{f_i} A)_{i\in I}$ eine $\mathbf{C}$-extremale Epi-Senke. Es reicht, $I' \subseteq I$ anzugeben mit $\operatorname{card} I' < \lambda$ und $\bigcup_{i\in I'} f_i[A_i] = \bigcup_{i\in I} f_i[A_i]$: Die $\mathbf{C}$-Epimorphie von $(f_i)_{i\in I'}$ folgt dann daraus, daß Komposition und Gleichheit von $\mathbf{A}$- (und somit von $\mathbf{C}$-) Morphismen konkret (das heißt punktweise) definiert sind, und die Extremalität daraus, daß $\mathbf{C}$-Monomorphismen initial sind (1.10(1)) (denn daraus folgt, daß $(f_i)_{i\in I}$ und $(f_i)_{i\in I'}$ durch dieselben Monomorphismen faktorisieren). Für jedes $a \in \bigcup_{i\in I} f_i[A_i]$ wähle $i_a \in I$ sodaß $a \in f_i[A_i]$. Dann hat $I' := \{i_a : a \in \bigcup_{i\in I} f_i[A_i]\}$ die gewünschten Eigenschaften und ist von Cardinalität kleiner λ, falls $\operatorname{card} A < \lambda$ gilt.

a $\overset{U}{\not\Rightarrow}$ **d** (Unterkategorie mit einem Vergißfunktor nach $\mathbf{Set}^\mathcal{S}$): Sei $\lambda := \aleph_0$ und $\mathbf{A}{:=}\mathbf{Alg}\,\Omega$ mit $\Omega := \{c\} \cup \{l_n : n \in \mathbb{N}\}$ (c constante, l_n unäre Operationen). $\mathbf{C}\subseteq\mathbf{A}$ sei die Unterkategorie bestehend aus den Objekten $A := (F_\mathbf{A}\emptyset/_{\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} l_n c=c})_\mathbf{A}$ und $A_N := (F_\mathbf{A}\emptyset/_{\bigwedge_{n\in N} l_n c=c})_\mathbf{A}$ für die endlichen $N \in \mathcal{P}_{fin}\mathbb{N}$. Dann ist die Senke der $A_N \longrightarrow A$ $\mathbf{C}$-extremal epimorph (extremal, da A $\mathbf{C}$-initial ist und extremal, da nur id_A durch sie faktorisiert), hat aber keine $\mathbf{C}$-extremal-epimorphe endliche Teilsenke: Sei eine endliche Teilsenke

durch endliches $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}_{fin}\mathbb{N}$ gegeben. Dann faktorisiert diese durch den Morphismus $A_{\bigcup \mathcal{N}} \longrightarrow A$, der monomorph (die A_N sind schwach **C**-terminal), aber kein Isomorphismus ist.

a $\overset{U}{\not\Rightarrow}$ **e** (Unterkategorie mit einem Vergißfunktor nach $\mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$): Sei $\lambda := \aleph_0$ und $\mathbf{A} := \mathbf{Alg}\,\Omega$ mit $\Omega := \{c_0, c_1\}$ (constante Operationen). $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{A}$ sei die Unterkategorie bestehend aus den Objekten $A := (F_{\mathbf{A}}\emptyset/_{c_0=c_1})_{\mathbf{A}}$ und $B := F_{\mathbf{A}}\emptyset$. Dann ist $\operatorname{card} A$ endlich, aber A ist nicht extremal endlich erzeugt (sogar überhaupt nicht extremal erzeugt): Sei $X \xrightarrow{g} A$ ein strukturierter Morphismus. Dann gibt es einen **Set**-Morphismus $X \xrightarrow{f} B$ mit $g = q \circ f$ (für den Quotienten q), und q ist **C**-monomorph (da B **C**-schwach terminal ist). Aber q ist kein Isomorphismus, also ist g nicht extremal.

b $\overset{D}{\Rightarrow}$ **1** (λ-direktive reflektive Unterkategorie): Sei $F_{\mathbf{C}}Y \rightrightarrows F_{\mathbf{C}}X \longrightarrow A$ ein **C**-Coegalisator mit $\operatorname{card} X, \operatorname{card} Y < \lambda$. Nach 3.15(3) ist (für jedes $s \in \mathcal{S}$) $F_{\mathbf{C}}1_s$ λ-präsentierbar, und somit auch A als **C**-Colimes eines λ-kleinen Diagramms dieser Objekte [AR 1.16].

b $\overset{m}{\not\Rightarrow}$ **2** (Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten, abgeschlossen unter λ-gerichteten Colimiten von Monodiagrammen): Es reicht, eine reflektive und unter Colimiten von λ-gerichteten Mono-Diagrammen abgeschlossene Unterkategorie **C** eines λ-ären $\mathbf{Alg}\,\tau$ mit einer nicht-überdeckenden λ-gerichteten Colimes-Senke anzugeben (da dann $F_{\mathbf{C}}1$ **C**-λ-präsentiert, aber nicht **C**-λ-klein ist): Sei $\lambda := \aleph_0$, $\mathbf{A} := \mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ mit $\Sigma := \{l_n : n \in \mathbb{N}\}$ (unäre Operationen) und $\mathbf{C} := \{e\}^{\perp}$ für die Einbettung

$$(F_{\mathbf{A}}1/_{\bigwedge_{n>0} l_n 0=0})_{\mathbf{A}} \xrightarrow{m} (F_{\mathbf{A}}2/_{l_0 1=1 \wedge \bigwedge_{n>0} l_n 0=0})_{\mathbf{A}} \ :$$

C ist nach 3.5(2) unter Colimiten von λ-gerichteten Mono-Diagrammen abgeschlossen und die gerichtete **C**-Colimes-Senke

$$\left((F_{\mathbf{A}}1/_{\bigwedge_{\mu \geq n>0} l_n 0=0})_{\mathbf{A}} \xrightarrow{0 \mapsto 0} (F_{\mathbf{A}}2/_{l_0 1=1 \wedge \bigwedge_{n>0} l_n 0=0})_{\mathbf{A}} \right)_{\mu>0}$$

ist nicht überdeckend.

b $\overset{Q}{\not\Rightarrow}$ **2** (Quasivarietät): Sei $\lambda := \aleph_0$, $\mathbf{A} := \mathbf{Alg}\,\Sigma$ mit $\Sigma := \{l_n : n \in \mathbb{N}\}$ und $\mathbf{C} := \{m\}^{\perp}$ mit dem Quotienten

$$(F_{\mathbf{A}}1/_{\bigwedge_{n>0} l_n 0=0})_{\mathbf{A}} \xrightarrow{m} (F_{\mathbf{A}}1/_{\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} l_n 0=0})_{\mathbf{A}} \ .$$

Dann ist $A := (F_{\mathbf{C}}1/_{l_0 0=0})_{\mathbf{C}}$ **C**-endlich präsentiert, aber nicht **C**-endlich klein: Es gibt einen Morphismus zum **C**-Colimes des Diagramms bestehend aus $(F_{\mathbf{C}}1/_{\bigwedge_{1\le n\le\mu} l_n 0=0})_{\mathbf{C}}$ (für $\mu > 0$), aber zu keinem der Diagrammobjekte.

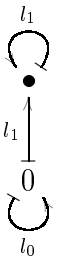
b $\overset{Q}{\not\Rightarrow}$ **3** (Quasivarietät): Es reicht, eine Quasivarietät $\mathbf{C}\subseteq\mathbf{Alg}\,\tau$ anzugeben, die nicht abgeschlossen unter Colimiten von λ-gerichteten Monodiagrammen ist (da dann $F_{\mathbf{C}}1$ **C**-λ-präsentiert, aber nicht **C**-λ-erzeugbar ist): Siehe 3.5(3) oder a $\overset{Q}{\not\Rightarrow}$ 3.

b $\overset{r}{\not\Rightarrow}$ **5** (reflektive Unterkategorie): Das Objekt $F_{\mathbf{C}}1$ in 4.4 7 $\overset{r}{\not\Rightarrow}$ 5 ist endlich präsentiert, aber nicht schwach endlich erzeugbar (s. dort).

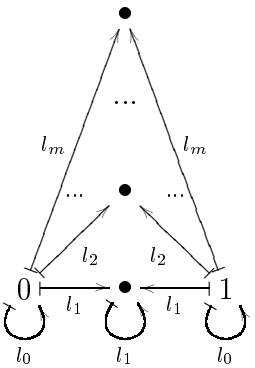
b $\overset{A}{\not\Rightarrow}$ **a** (λ-äres $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$): Folgt aus 1 $\overset{A}{\not\Rightarrow}$ a und 1 $\overset{O}{\Rightarrow}$ b.

b $\Rightarrow$ **c:** Dies folgt direkt aus der Definition.

b $\overset{m}{\not\Rightarrow}$ **d** (Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten, abgeschlossen unter λ-gerichteten Colimiten von Monodiagrammen): Sei $\mathbf{A}{:=}\mathbf{Alg}\,\boldsymbol{\Sigma}$ mit $\Sigma := \{l_n : n \in \mathbb{N}\}$, **C** sei die Unterkategorie bestehend aus den **A**-relativ freien Objekten, sowie $A := (F_{\mathbf{A}}1/_{l_0 0=0\wedge l_1 l_1 0=l_1 0})_{\mathbf{A}}$:



und $A_m := (F_{\mathbf{A}}2/_{l_0 0=0\wedge l_0 1=1\wedge l_1 l_1 0=l_1 0\wedge \bigwedge_{1\le n\le m} l_n 0=l_n 1})_{\mathbf{A}}$:



für $m > 0$. **C** hat nach 1.26 kanonische freie Objekte und ist abgeschlossen unter λ-gerichteten Colimiten von Monodiagrammen, da ein **C**-Monodiagramm entweder nur aus torsionsfreien Objekten besteht (und dessen

Colimes torsionsfrei ist), oder (ohne Einschränkung) A oder ein A_m als terminales Objekt besitzt.

A ist **C**-endlich präsentiert durch den **C**-Coegalisator $F_{\mathbf{A}}\{l_1(l_1(0)), l_1(0)\} \rightrightarrows F_{\mathbf{A}}1 \longrightarrow A$, aber A ist nicht **C**-endlich kompakt, denn die extremale Epi-Senke $(F_{\mathbf{A}}1 \xrightarrow{e_n:0\mapsto l_n(0)} A)_{n>0}$ (Extremalität folgt von der Existenz des l_1-Fixpunktes) hat keine extremal-epimorphe endliche Teil-Senke: Sei eine endliche Teilsenke durch $N \subseteq \mathbb{N}$ gegeben, sei $n_* := \max N$. Definiere $A \xrightarrow{f_i} A_{n_*}$ (für $i \in 2$) durch $f_i(0) := i$. Dann gilt $f_0 \circ (e_n)_{n\in N} = f_1 \circ (e_n)_{n\in N}$.

b $\overset{r}{\not\Rightarrow}$ **d** (reflektive Unterkategorie): Das Objekt A in 4.4: 3 $\overset{r}{\not\Rightarrow}$ d ist per Konstruktion **C**-endlich präsentiert, aber nicht **C**-endlich kompakt (siehe dort).

c $\overset{m}{\Rightarrow}$ **3** (Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten, abgeschlossen unter λ-gerichteten Colimiten von Monodiagrammen): Sei $F_{\mathbf{C}}X \longrightarrow A$ ein **C**-regulärer Epimorphismus mit $\operatorname{card} X < \lambda$. Wegen 2.1 ist $F_{\mathbf{C}}X$ für $\operatorname{card} X < \lambda$ (und damit X λ-erzeugbar in **Set**) λ-erzeugbar, und somit auch A als dessen starker Quotient (siehe Beweis von [GU 6.7d]: da **C** abgeschlossen unter λ-gerichteten Colimiten von Monodiagrammen ist, bestehen deren Senken aus Monomorphismen).

c $\overset{S^>_\tau}{\Rightarrow}$ **a** (unterobjekt-abgeschlossene Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten eines finitären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$, es gilt $\tau < \lambda > \aleph_0$): Sei $F_{\mathbf{C}}X \xrightarrow{q} A$ **C**-regulärer Epimorphismus. Da **C** unterobjekt-abgeschlossen ist, ist jedes $a \in A$ als Term in $q[X]$ darstellbar (da $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ (surjektiv, injektiv)-faktorisierbar ist). Mit der Annahme an **C** und da λ regulär ist, folgt dann $\operatorname{card} A < \lambda$ aus $\operatorname{card} X < \lambda$, da finitäre Terme endlich sind (denn damit kann man induktiv zeigen, daß es weniger als λ Terme einer gegebenen Länge gibt, und nach Voraussetzung gilt $\lambda > \aleph_0$) (vergleiche auch [AR 1.14(5)]).

c $\overset{A}{\not\Rightarrow}$ **b** (λ-äres $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$): Dies gilt wegen a $\overset{A}{\not\Rightarrow}$ b.

c $\overset{S}{\Rightarrow}$ **d** (unterobjekt-abgeschlossene Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten): Sei **C** eine unterobjekt-abgeschlossene Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten eines λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$. Sei $A \in \mathbf{C}$ λ-erzeugt, also existieren $X \in \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$ mit $\operatorname{card} X < \lambda$ und ein **C**-regulärer Epimorphismus $F_{\mathbf{C}}X \xrightarrow{c} A$. Sei $(A_i \xrightarrow{f_i} A)_{i\in I}$ eine extremale Epi-Senke. Nach 3.12

ist $(f_i)_{i\in I}$ dann überdeckend. Somit existiert $I'\subseteq I$ mit $\operatorname{card} I' < \lambda$, sodaß $c[X]\subseteq \bigcup_{i\in I'} f_i[A_i]$. Nun ist $X \hookrightarrow F_{\mathbf{C}}X \xrightarrow{c} A$ extremal erzeugend (als Komposition eines universellen gefolgt von einem extremal epimorphen Morphismus), und somit überdeckend ([AHS 8.36] und 3.12), also ist auch $(f_i)_{i\in I'}$ überdeckend nach Annahme an $\mathbf{C}$, also extremal epimorph nach 3.12.

c $\Rightarrow$ e: Dies gilt nach [AHS 8.36(2)].

d $\overset{m}{\not\Rightarrow}$ 5 (Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten, abgeschlossen unter Colimiten von λ-gerichteten Monodiagrammen): Sei $\lambda := \aleph_0$, $\mathbf{A}{:=}\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ mit $\Sigma := \{l_n, p_n : n \in \mathbb{N}\}$ und $\mathbf{C}$ die Unterkategorie bestehend aus den relativ freien Objekten, sowie $A := (F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}/_{\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} l_n n=n})_{\mathbf{A}}$, $B := (F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}/_{\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} (l_n n=n\wedge p_n n=n)})_{\mathbf{A}}$ und $B_m := (F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}_{\leq m}/_{\bigwedge_{n\leq m} (l_n n=n\wedge p_n n=n)})_{\mathbf{A}}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$. $\mathbf{C}$ ist analog zu b $\overset{m}{\not\Rightarrow}$ d (und weil B der Colimes der B_m ist) abgeschlossen unter Colimiten von λ-gerichteten Monodiagrammen und hat kanonische freie Objekte.
A ist $\mathbf{C}$-endlich kompakt, denn jede nicht-leere Senke mit Codomain A ist extremal epimorph (man beachte aber, daß etwa die $F_{\mathbf{C}}X \longrightarrow A$ mit endlichem X notwendigerweise nicht stark epimorph sind, vgl. c $\overset{m}{\Rightarrow}$ 3), denn es gilt $\operatorname{card}\hom_{\mathbf{C}}(A, C) \leq 1$ für jedes $C \in \mathbf{C}$ und der einzige $\mathbf{C}$-Monomorphismus mit Codomain A ist id_A. A ist jedoch nicht schwach endlich erzeugbar, denn es hat einen Morphismus zum Colimes B der B_m, aber zu keinem der B_m.

d $\overset{r}{\not\Rightarrow}$ 5 (reflektive Unterkategorie): Dies gilt wegen a $\overset{r}{\not\Rightarrow}$ 5 und a $\overset{f}{\Rightarrow}$ d.

d $\overset{Q}{\not\Rightarrow}$ c (λ-orthogonale Unterkategorie): Dies gilt wegen 3 $\overset{Q}{\not\Rightarrow}$ c und 3 $\overset{D}{\Rightarrow}$ d.

d $\overset{f}{\Rightarrow}$ e (Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten): Sei $\mathbf{C}$ Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten von $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$, $A \in \mathbf{C}$ sei λ-kompakt. Nach 3.13 gibt es dann eine (automatisch $\mathbf{A}$-extremal-epimorphe) $\mathbf{A}$-Colimes-Senke $(\, A_i \xrightarrow{f_i} A \,)_{i\in I}$ und $\mathbf{A}$-extremal-epimorphe $X_i \xrightarrow{g_i} A_i$ mit $X_i \in \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$ und $\operatorname{card} X_i < \lambda$. Seien $F_{\mathbf{A}}X_i \xrightarrow{\bar{g}_i} A_i$ die $\mathbf{A}$-Fortsetzungen der g_i und seien $(\, F_{\mathbf{C}}X_i \xrightarrow{\bar{f}_i} A \,) := R(\bar{g}_i \circ f_i)$ (sodaß $f_i \circ \bar{g}_i = \bar{f}_i \circ r_{F_{\mathbf{A}}X_i}$ für jedes i). Dann ist jeder $\bar{g}_i$ $\mathbf{A}$-extremaler Epimorphismus [AHS 8.36] und somit $(f_i \circ \bar{g}_i)_{i\in I}$ eine $\mathbf{A}$-extremale Epi-Senke, weil $\mathbf{A}$ eine (Extremal Epi, Mono-Quelle)-Kategorie ist [AHS 15.3(3)], also extremale Epi-Senken komponierbar sind. Somit ist $(\bar{f}_i)_{i\in I}$ auch eine $\mathbf{A}$-extremale Epi-Senke [AHS 10.13], und ebenfalls eine $\mathbf{C}$-extremale Epi-Senke nach 1.10(2). Also gibt es nach Annahme an A ein

$I' \subseteq I$ mit $I' < \lambda$, sodaß $(\bar{f}_i)_{i \in I'}$ eine **C**-extremale Epi-Senke ist. Damit ist aber der faktorisierende Morphismus $F_{\mathbf{C}} \coprod_{i \in I'} X_i \longrightarrow A$ ein **C**-extremaler Epimorphismus, A ist also **C**-extremal endlich-erzeugt nach 4.7.

d $\overset{U}{\not\Rightarrow}$ **e** (Unterkategorie mit Vergißfunktor): Sei $\mathbf{A} := \mathbf{Alg}\,\mathbf{\Sigma}$ für $\Sigma := \{l_n : n \in \mathbb{N}\}$ (unäre Operationen). Sei **C** die Unterkategorie bestehend aus $A := (F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}/_{\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} l_n n = n})_{\mathbf{A}}$ und ${}^2A$ (mit dem kanonischen Vergißfunktor). Dann ist A nicht extremal endlich-erzeugt: Sei $(X \xrightarrow{g} A) \in \mathbf{Set}$ mit $\operatorname{card} X < \lambda$. Dann gibt es ein endliches $N \subseteq \mathbb{N} \subseteq A$ mit $g[X] \subseteq < N >_A$. Definiere $A \xrightarrow{f_i} {}^2A$ für $i \in 2$ durch $f_i(n) = \mu_1(n)$ für $n \in N$ und $f_i(n) = \mu_i(n)$ sonst (jeweils für $i \in 2$ und die Coprodukt-Injektionen μ_i). Dann gilt $f_0 \circ g = f_1 \circ g$, aber $f_0 \neq f_1$. A ist aber endlich-kompakt, da ohnehin beide Morphismen nach A extremal epimorph sind ($[id_A, id_A]$ ist epimorph und nicht monomorph).

e $\overset{D}{\Rightarrow}$ **3** (λ-direktive reflektive Unterkategorie): Sei $F_{\mathbf{C}}X \longrightarrow A$ ein **C**-extremaler (und somit nach 3.11(1) starker) Epimorphismus mit $\operatorname{card} X < \lambda$. Nach 2.1 ist $F_{\mathbf{C}}X$ λ-präsentierbar, da X es ist. Damit ist dessen starker Quotient A noch λ-erzeugbar ([GU 6.7d] oder [AR 1.69]).

e $\overset{S}{\Rightarrow}$ **5** (unterobjekt-abgeschlossene Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten): Dies gilt wegen e $\overset{D}{\Rightarrow}$ 5 und weil **C** nach 3.7(2) abgeschlossen in **A** unter in **C** existierenden λ-gerichteten Colimiten mit Mono-Transformationen ist.

e $\overset{S}{\Rightarrow}$ **c** (unterobjekt-abgeschlossene Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten): Sei A extremal λ-erzeugt. Nach 4.7 existiert dann $X \in \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$ mit $\operatorname{card} X < \lambda$, sowie ein extremaler Epimorphismus $F_{\mathbf{A}}X \xrightarrow{c} A$. Sei $m \circ e = c$ die **A**-reguläre Faktorisierung von c. Dann ist m in **C** und somit Isomorphismus, also ist c **C**-regulär, weil e es ist (aus [AHS 13.30] folgt, daß Einbettungen (voller) reflektiver Unterkategorien reguläre Epimorphismen reflektieren).

e $\overset{D}{\Rightarrow}$ **d** (λ-direktive reflektive Unterkategorie): Siehe 4.2.2.

e $\overset{m}{\not\Rightarrow}$ **d, e** $\overset{r}{\not\Rightarrow}$ **d** (Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten, abgeschlossen unter λ-gerichteten Colimiten von Monodiagrammen, bzw. reflektive Unterkategorie): Dies gilt wegen b $\overset{m}{\not\Rightarrow}$ d und b $\overset{r}{\not\Rightarrow}$ d. \$

4.9 Bemerkung

(1) In [Mat 2.11] gibt wird die Äquivalenz der Bedingungen 1,2,b und c an ein Objekt in weiteren Kategorien gezeigt.

(2) Nach dem Hauptsatz über endlich erzeugten abelschen Gruppen [Mey 2.3.2] ist jede endlich erzeugte abelsche Gruppe endlich präsentiert [P V20(3)]. Somit stimmen in $\mathbf{Ab}$ (und etwa in $\mathbf{Vec}$) für $\lambda := \aleph_0$ alle in 4.4 und 4.8 betrachteten Bedingungen bis auf die Bedingung (a) (endliche Kardinalität) überein.

(3) Ein Beispiel für eine endlich erzeugte Gruppe, die nicht endlich präsentiert ist, findet man in [Rob 14.1.4], für eine endlich erzeugte, aber nicht endlich präsentierte Halbgruppe in [AR ex3d(2)] und für einen endlich erzeugten, aber nicht endlich präsentierten Verband in [EvaHon].

(4) Ein weiteres Beispiel dafür, daß 1 $\Rightarrow$ c in einer λ-direktiven Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten von $\mathbf{Alg}\,\mathbf{\Omega}$ im allgemeinen nicht gilt, ist: $\mathbf{A}{:=}\mathbf{Alg}\,\mathbf{\Omega}$ mit $\Omega := \{0, -, +\}$ und $\mathbf{C} := \mathbf{TfAb} \cup \{{}^{\mathbb{N}}\mathbb{Z}_2\}$, sowie $A =^{\mathbb{N}} \mathbb{Z}_2$. $\mathbf{C}$ hat kanonische freie Objekte (da freie abelsche Gruppen torsionsfrei sind) und ist λ-direktiv, da jeder Homomorphismus ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{Z}_2 \longrightarrow C$ (für torsionsfreies C) trivial ist, und somit ein gerichtetes Diagramm in $\mathbf{C}$, daß ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{Z}_2$ enthält, ohne Einschränkung ein terminales Objekt $\{0\}$ oder ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{Z}_2$ hat (und dasselbe Objekt somit sowohl als $\mathbf{Ab}$- als auch als $\mathbf{C}$-Colimes). Ein gerichteter $\mathbf{Ab}$-Colimes von torsionsfreien abelschen Gruppen ist torsionsfrei, denn $\mathbf{TfAb}$ ist eine finitäre Quasivarietät [AR 3.20(2)]. ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{Z}_2$ ist $\mathbf{C}$-endlich präsentierbar (ebenfalls weil jeder Homomorphismus ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{Z}_2 \longrightarrow C$ für torsionsfreies C trivial ist), aber nicht $\mathbf{C}$-endlich erzeugt, da $F_{\mathbf{Ab}}X \longrightarrow {}^{\mathbb{N}}\mathbb{Z}_2$ für endliches $X \in \mathbf{Set}$ nicht einmal epimorph ist (siehe 4.8: 1 $\overset{m}{\not\Rightarrow}$ e).

(5) Zur Frage, ob 2 $\overset{r}{\Rightarrow}$ d gilt:

- Das Objekt A im Beweis von 3 $\overset{r}{\not\Rightarrow}$ d ist leider nicht endlich-klein (siehe 4.5(1)).
- Der Versuch, den Beweis von e $\overset{D}{\Rightarrow}$ d (siehe 4.2.2) in einen Beweis für 2 $\overset{r}{\Rightarrow}$ d zu modifizieren, scheitert leider daran, daß in einer reflektiven Unterkategorie $\mathbf{C}$ von λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ der Morphismus m_i' in der Nachfolger-Ordinalzahl-Schritt der Konstruktion in Lemma von e $\overset{D}{\Rightarrow}$ d kein Monomorphismus zu sein braucht (s. 3.7). Man kann nun die Konstruktion nur auf das λ-gerichtete Diagramm der $B_{I'}$ $(I' \in \mathcal{I})$ ohne deren Colimes anwenden, bis

dies stationär wird (nennen wir das erhaltene Diagramm D). Dann sind die $f_{i_*}^{I'}$ monomorph, und A ist ihre λ-gerichtete Vereinigung, denn faktorisieren sie durch ein Unterobjekt m, so tut dies nach Konstruktion die ($\mathbf{C}$-extremal epimorphe) Senke der $(f_i)_{i\in I}$. Wäre A auch der $\mathbf{C}$-Colimes von D, so könnte man ähnlich wie im Beweis für $1 \overset{r}{\Rightarrow}$ d fortfahren (und dabei statt der λ-Präsentierbarkeit von $F_{\mathbf{C}}X$ die von A auszunutzen). Es stellt sich also sich die Frage, ob ein λ-kleines (oder λ-präsentierbares) Objekt A, das Vereinigung eines λ-gerichteten Diagramms in einer reflektiven Unterkategorie $\mathbf{C}$ eines λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ ist, dessen $\mathbf{C}$-Colimes ist. Dies wäre dann der Fall, wenn ein λ-kleines (oder λ-präsentierbares) Objekt A in einer reflektiven Unterkategorie $\mathbf{C}$ eines λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ λ-vereinigbar ist (was leider noch offen ist, vgl. 4.4): Nach 4.2(5) ist dann nämlich einer der Vereinigungsmorphismen eine Retraktion und somit ein Isomorphismus (weil monomorph). Dann ist A ohne Einschränkung terminales Objekt des Diagramms, da die Morphismen von über A liegenden Diagramm-Objekten analog ebenfalls Isomorphismen sind.

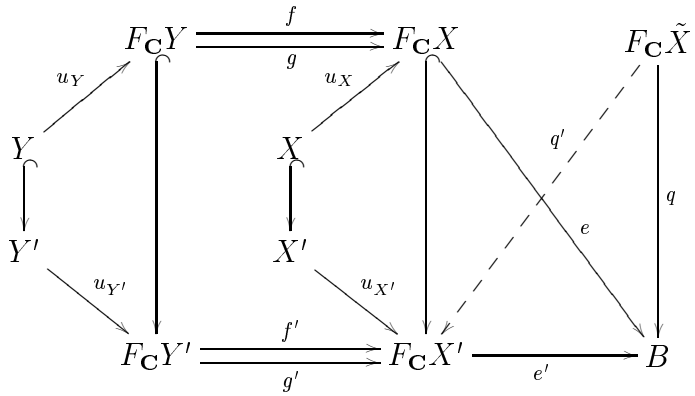
(6) Es gelten b $\overset{r}{\not\Rightarrow}$ 4 und d $\overset{r}{\not\Rightarrow}$ 4, da das Objekt A in 4.4: 3 $\overset{r}{\not\Rightarrow}$ 4 $\mathbf{C}$-endlich präsentiert (per Definition) und $\mathbf{C}$-endlich kompakt ist (trivialerweise, da $\operatorname{card}\hom_{\mathbf{C}}(A,C) \leq 1$ für jedes $C \in \mathbf{C}$, siehe im dortigen Beweis).

4.2.1 In λ-Orthogonalitätsklassen und Quasivarietäten sind λ-kleine Objekte λ-präsentiert

In diesem Unterabschnitt wird gezeigt, daß freie Objekte über Mengen von Kardinalität kleiner als λ in λ-orthogonalen Unterkategorien von λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ eine Art Projektivitätsbedingung erfüllen (siehe 4.11). Dies wird benutzt, um zu zeigen, daß λ-kleine Objekte in λ-orthogonalen Unterkategorien von λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ λ-präsentiert sind (das ist 4.8: 2 $\overset{O}{\Rightarrow}$ b). Damit sind gleichzeitig Bedingungen gegeben, unter denen die in [GU 7.7e] aufgeworfene Fragestellung (vergleiche 4.22(3)) positiv beantwortet wird.

4.10 Proposition (AR 3.31)
In jeder λ-ären Varietät sind die λ-präsentierbaren Objekte genau die λ-präsentierten Objekte. \$

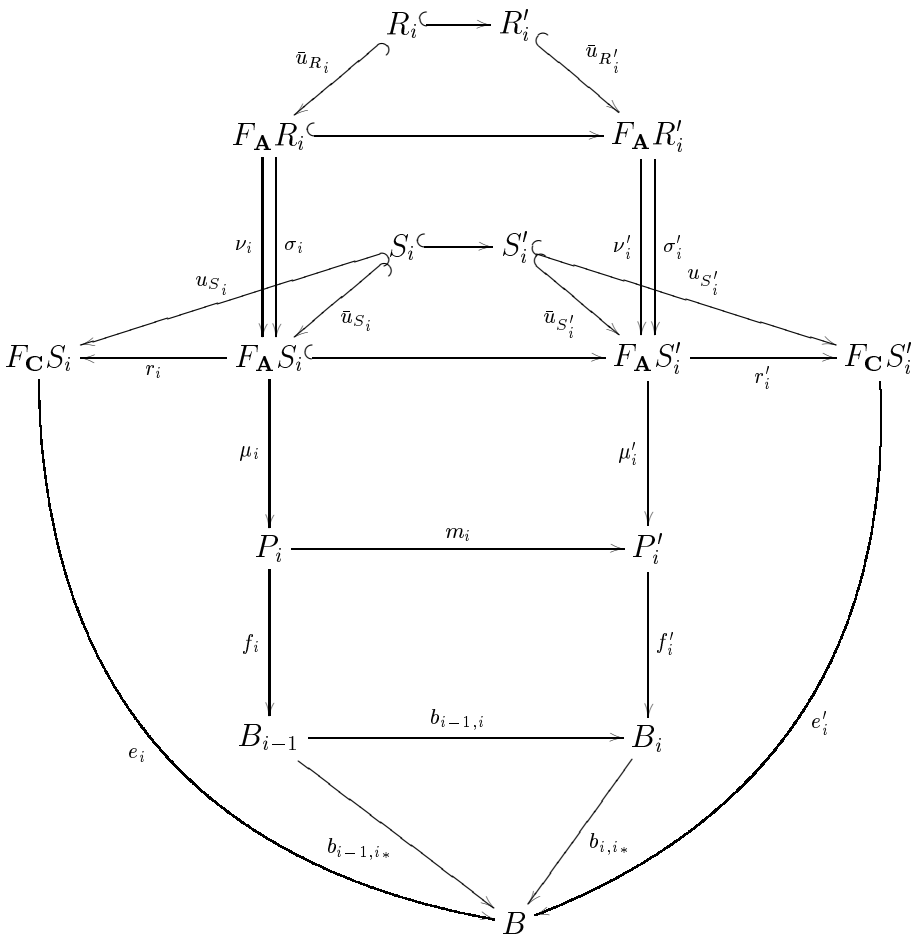
4.11 Lemma
Sei $\mathbf{C}$ *eine* λ*-orthogonale Unterkategorie von* $\mathbf{A}{:=}\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ *für ein* λ*-äres* τ *und eine Sortenmenge* $\mathcal{S}$*. Seien* $X, Y, \tilde{X} \in \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$ *mit* $\operatorname{card} X < \lambda$ *und* $\operatorname{card} \tilde{X} < \lambda$*. Sei* $F_{\mathbf{C}}Y \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} F_{\mathbf{C}}X \xrightarrow{e} B$ *ein* $\mathbf{C}$*-Coegalisator und sei* $(\, F_{\mathbf{C}}\tilde{X} \xrightarrow{q} B \,) \in \mathbf{C}$*. Dann existieren* $X', Y' \in \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$ *mit* $\operatorname{card} X' < \lambda$*,* $Y \subseteq Y'$ *und* $X \subseteq X'$*, ein* $\mathbf{C}$*-Coegalisator* $F_{\mathbf{C}}Y' \underset{g'}{\overset{f'}{\rightrightarrows}} F_{\mathbf{C}}X' \xrightarrow{e'} B$ *und* $(\, F_{\mathbf{C}}\tilde{X} \xrightarrow{q'} F_{\mathbf{C}}X' \,) \in \mathbf{C}$*, sodaß folgendes Diagramm kommutiert (seien* $u_{_}$ *universelle Morphismen):*



Gilt $\operatorname{card} Y < \lambda$*, so kann auch* Y' *so gewählt werden, daß* $\operatorname{card} Y' < \lambda$ *gilt.*

Beweis
Sei $\mathbf{C} = \mathcal{M}^{\perp}$, sodaß Domain und Codomain eines jeden Morphismus in $\mathcal{M}$ λ-präsentierbar sind. Sei $F_{\mathbf{C}}Y \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} F_{\mathbf{C}}X \xrightarrow{\bar{e}} K$ der $\mathbf{A}$-Coegalisator. Sei $B_0 := K$ und die $\mathbf{C}$-Reflektion $B_{i_*} := B$ von K konstruiert wie in 2.5 (mit den dortigen Bezeichnungen). Für zu Spannen gehörende B_i existieren nach 2.5 ein $\mathbf{A}$-Pushout $\begin{array}{ccc} P_i & \xrightarrow{m_i} & P_i' \\ {\scriptstyle f_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_i'} \\ B_{i-1} & \xrightarrow[b_{i-1,i}]{} & B_i \end{array}$ und ein $\mathbf{A}$-Colimes $(\, B_i \xrightarrow{b_{i,i_*}} B_{i_*} \,)_{i<i_*}$ zum Diagramm $(\, B_i \xrightarrow{b_{i,j}} B_j \,)_{i,j<i_*}$, und nach Annahme an $\mathcal{M}$, sowie nach 4.10 und 1.27 existieren $R_i \subseteq R_i' \in \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$ und $S_i \subseteq S_i' \in \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$ jeweils von Kardinalität kleiner als λ und $\mathbf{A}$-Coegalisatoren $F_{\mathbf{A}}R_i \underset{\sigma_i}{\overset{\nu_i}{\rightrightarrows}} F_{\mathbf{A}}S_i \xrightarrow{\mu_i} P_i$ und $F_{\mathbf{A}}R_i' \underset{\sigma_i'}{\overset{\nu_i'}{\rightrightarrows}} F_{\mathbf{A}}S_i' \xrightarrow{\mu_i} P_i'$, sodaß folgendes Diagramm kommutiert. Dabei seien die (injektiven) $\mathbf{A}$-universellen Pfeile $\bar{u}$ zur Vereinfachung der Notation ohne Einschränkung Inklusionen,und die unbezeichneten Pfeile seien ebenfalls Inklusionen (der Coadjungierte $F_{\mathbf{C}}$ bewahrt Schnitte). Es seien r_i, r_i' die Reflektionspfeile und es sei e_i (bzw. e_i') die R-

Fortsetzung von $b_{i-1,i_*} \circ f_i \circ \mu_i$ (bzw. $b'_{i-1,i_*} \circ f'_i \circ \mu'_i$).



(4.1)

Für $b \in B_j$ (für $j < i_*$) definieren wir $i_b := \min\{i \leq j : b \in b_{i,j}[B_i]\}$ (die betrachtete Menge ist nicht-leer, da $b_{j,j} = id_{B_j}$). Aufgrund der Minimalität von i_b gilt entweder $i_b = 0$, oder es gehört eine Spanne zu i_b (vgl. 2.5): Denn die λ-gerichteten $\mathbf{A}$-Colimiten, durch die die B_l mit Limeszahl l definiert werden, sind überdeckend [AHS 11.28(4)], und die $\mathbf{A}$-Coegalisator-Morphismen zu Paaren von Morphismen sind ebenfalls surjektiv [AHS 7.72(3)].
Nach Konstruktion eines $\mathbf{A}$-Pushouts durch Coprodukt und Coegalisator [AHS 11.11] (und da $\mathbf{A}$-reguläre Epimorphismen surjektiv sind) existieren $U_b \subseteq B_{i_b-1}$ und $V_b \subseteq F_{\mathbf{A}}S'_{i_b}$ mit $\operatorname{card} U_b, \operatorname{card} V_b < \lambda$ (wegen 1.3, denn $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ ist λ-är und Terme bestehen per Definition aus nur endlichen Kompositionen von Operationen), sodaß $b = b_{i_b,j}(x_b)$ für ein $x_b \in B_{i_b}$ ist, das als Term $\vec{t}_b$ in $b_{i_b-1,i_b}[U_b] \cup f'_i \circ \mu'_{i_b}[V_b]$ darstellbar ist. Definieren wir nun rekursiv W_α für $\alpha < \lambda$:

α=0: $W_0 := q[u_{\tilde{X}}[\tilde{X}]]$

Nachfolger: Für $\alpha < \lambda$ sei $W_{\alpha+1} := \bigcup_{b \in W_n : i_b > 0} U_b \cup f_{i_b} \circ \mu_{i_b}[S_{i_b}]$.

Limeszahl: Für eine Limeszahl $\beta \leq \lambda$ sei $W_\beta := \bigcup_{\alpha<\beta} W_\alpha$.

Es gilt $\operatorname{card} W_\lambda < \lambda$ wegen 1.3 mit $\mathcal{X} := W_\lambda \amalg \{x_*\}$ und der Relation $x_* \to b' :\Leftrightarrow b' \in W_0$ und $b \to b' :\Leftrightarrow b \in U_{b'} \cup f_{i_{b'}} \circ \mu_{i_{b'}}[S_{i_{b'}}]$ (für $b, b' \in W_\lambda$; jede Kette ist endlich wegen $i_x < i_b$ für jedes $x \in U_b \cup f_{i_b} \circ \mu_{i_b}[S_{i_b}] \subseteq B_{i_b-1}$, und da **Ord** wohlgeordnet ist). Damit gilt für $J := \{0\} \cup \{i_b : b \in W_\lambda\}$ auch $\operatorname{card} J < \lambda$. Und ebenfalls gilt $\operatorname{card} X' < \lambda$ für $X' := \coprod_{j\in J} S'_j$ (mit $S'_0 := X$). Sei $e' := (\, F_{\mathbf{C}}X' = F_{\mathbf{C}} \coprod_{j\in J} S'_j \xrightarrow{[e'_j]} B\,)$ (mit $e'_0 := e$).

Wir definieren nun $F_{\mathbf{C}}\tilde{X} \xrightarrow{q'} F_{\mathbf{C}}X'$ wie folgt: Sei $x \in u_{\tilde{X}}[\tilde{X}] \subseteq F_{\mathbf{C}}\tilde{X}$. Nach Konstruktion J ist $q(x)$ als Term in $\bigcup_{j\in J} b_{j,i_*} \circ f'_j \circ \mu'_j[F_{\mathbf{A}}S'_j] \subseteq B_{i_*}$ darstellbar. Sei dann $y_x \in F_{\mathbf{A}} \coprod_{j\in J} S'_j$ ein Element, das zu diesem Term gehört (d.h. es gelte $[b_{j,i_*} \circ f'_j \circ \mu'_j](y_x) = q(x)$) und sei $q'(x) := r_{F_{\mathbf{A}}(\coprod_{j\in J} S'_j)}(y_x)$.

Damit kommutieren die Diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{u_X} & F_{\mathbf{C}}X & & \\ \downarrow & & \downarrow & \searrow^{e} & \\ X' & \xrightarrow[u_{X'}]{} & F_{\mathbf{C}}X' & \xrightarrow[e']{} & B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & & F_{\mathbf{C}}\tilde{X} \\ & \swarrow^{q'} & \downarrow q \\ F_{\mathbf{C}}X' & \xrightarrow[e']{} & B \end{array}$$

(das zweite wegen $e'_i \circ r'_i = b_{i,i_*} \circ f'_i \circ \mu'_i$ für jedes i). Wenn wir nun zeigen können, daß e' ein **C**-strikter Epimorphismus ist, dann ist e' sogar **C**-regulär (3.11(5)), d.h. es existieren $Y' \in \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$ und $f', g' \in \operatorname{Mor}\mathbf{C}$ sodaß $F_{\mathbf{C}}Y' \underset{g'}{\overset{f'}{\rightrightarrows}} F_{\mathbf{C}}X' \xrightarrow{e'} B$ ein **C**-Coegalisator ist.

Gilt $\operatorname{card} Y < \lambda$, so ist B **C**-λ-präsentierbar als λ-kleiner Colimes (e ist **C**-regulärer Epimorphismus) der **C**-λ-präsentierbaren (3.15(3)) $F_{\mathbf{C}}1_s$ ($s \in \mathcal{S}$). Wegen 4.20 (mit 1.19 und 1.13) kann dann Y' mit $\operatorname{card} Y' < \lambda$ gewählt werden.

Ohne Einschränkung kommutiert auch

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{u_Y} & F_{\mathbf{C}}Y & \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} & F_{\mathbf{C}}X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y' & \xrightarrow{u_{Y'}} & F_{\mathbf{C}}Y' & \underset{g'}{\overset{f'}{\rightrightarrows}} & F_{\mathbf{C}}X' \end{array}$$

(Gegebenenfalls ersetzen wir Y' durch $Y'' := Y' \amalg Y$, f' durch $f'' := [f', f]$ und g' durch $g'' := [g', g]$. Dann ist $F_{\mathbf{C}}Y'' \underset{g''}{\overset{f''}{\rightrightarrows}} F_{\mathbf{C}}X' \xrightarrow{e'} B$ ebenfalls **C**-Coegalisator, da $e' \circ f = e \circ f = e \circ g = e' \circ g'$ gilt.)

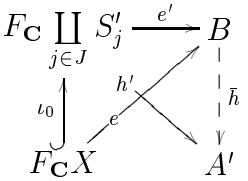
Es bleibt also zu zeigen, daß e' strikter Epimorphismus ist. $e' = [e'_i]$ ist Epimorphismus, da $e'_0 = e$ es ist. Sei $(F_{\mathbf{C}}X' \xrightarrow{h'} A') \in \mathbf{C}$ gegeben, sodaß

$$\forall t, t' \in \mathrm{Mor}\,\mathbf{C} : (e' \circ t = e' \circ t' \Rightarrow h' \circ t = h' \circ t'). \tag{4.2}$$

Sei $h'_i := h' \circ \iota_i$ mit $F_{\mathbf{C}}S'_i \xrightarrow{\iota_i} F_{\mathbf{C}} \coprod_{j\in J} S'_j$ (es gilt also bis auf einen Isomorphismus $h' = [h'_i]$). Wir brauchen ein $\bar{h} \in \hom_{\mathbf{C}}(B, A)$ mit $\bar{h} \circ e' = h'$. Wir haben $\bar{h}$, sodaß

$$\bar{h} \circ e = h' \circ \iota_0, \tag{4.3}$$

denn e ist Coegalisator von (f, g) und $e' \circ \iota_0 \circ f = e \circ f = e \circ g = e' \circ \iota_0 \circ g$, also $h' \circ \iota_0 \circ f = h' \circ \iota_0 \circ g$ nach (4.2).



Es bleibt $\bar{h} \circ e' = h'$ zu zeigen. Dazu zeigen wir per transfiniter Induktion [Hal p66] über k, daß die Behauptung

$$\forall y \in S'_k \subseteq F_{\mathbf{A}}S'_k : \bar{h}(e'_k(r'_k(y))) = h'_k(r'_k(y))$$

für jedes k gilt (dies reicht, da r'_k Reflektionspfeil ist, und Colimes-Senken epimorph sind).

$k = 0$: Dies gilt nach (4.3) wegen $e = e'_0$.

Induktionsschritt: Sei $y \in S'_k \subseteq F_{\mathbf{A}}S'_k$ und für jedes $y' \in S'_j \subseteq F_{\mathbf{A}}S'_j$ mit $j < k$ gelte $h'(r'_j(y')) = \bar{h}(e'(r'_j(y')))$. Wir müssen $h'_k(r'_k(y)) = \bar{h}(e'_k(r'_k(y)))$ zeigen. Für jedes $z \in S_k \subseteq F_{\mathbf{A}}S'_k$ ist (nach Konstruktion J) $e'(z)$ darstellbar als: $e'_k(r'_k(z)) = e'(\vec{t}(\vec{a}))$ für einen Term $(F_{\mathbf{C}} \coprod_{j\in J} S'_j)^\alpha \xrightarrow{\vec{t}} F_{\mathbf{C}} \coprod_{j\in J} S'_j$ und $\vec{a} \in (F_{\mathbf{C}} \coprod_{k>j\in J} S'_j)^\alpha$. Nach (4.2) gilt dann auch $h'_k(r'_k(z)) = h'(\vec{t}(\vec{a}))$ und somit

$$\begin{aligned} \bar{h}(e'_k(r'_k(z))) &= \bar{h}(e'(\vec{t}(\vec{a}))) \\ &= h'(\vec{t}(\vec{a})) \\ &= h'_k(r'_k(z)). \end{aligned}$$

Dabei gilt die zweite Gleichung nach Induktionsvoraussetzung (und da die Homomorphismen $\bar{h}, e', h'$ mit Termen kommutieren). Also kommutiert (denn S_k erzeugt $F_{\mathbf{A}}S_k$)

$$\begin{array}{ccccccc} F_{\mathbf{A}}S_k & \overset{\varphi}{\hookrightarrow} & F_{\mathbf{A}}S'_k & \xrightarrow{r'_k} & F_{\mathbf{C}}S'_k & \xrightarrow{e'_k} & B \\ & & & & & \searrow^{h'_k} & \downarrow{\scriptstyle \bar{h}} \\ & & & & & & A' \end{array} \tag{4.4}$$

(mit der Inklusion $F_{\mathbf{A}}S_k \overset{\varphi}{\hookrightarrow} F_{\mathbf{A}}S'_k$) Da $e'_k \circ r'_k$ durch μ'_k faktorisiert (s.(4.1)), kommutiert $F_{\mathbf{A}}R'_k \underset{\sigma'_k}{\overset{\nu'_k}{\rightrightarrows}} F_{\mathbf{A}}S'_k \xrightarrow{e'_k \circ r'_k} B$ und nach (4.2) also auch $F_{\mathbf{A}}R'_k \underset{\sigma'_k}{\overset{\nu'_k}{\rightrightarrows}} F_{\mathbf{A}}S'_k \xrightarrow{h'_k \circ r'_k} A'$. Da μ'_k der $\mathbf{A}$-Coegalisator von (ν'_k, σ'_k) ist, existiert $\tilde{h}$, sodaß $\tilde{h} \circ \mu'_k = h'_k \circ r'_k$.

Damit kommutiert $P_k \xrightarrow{m_k} P'_k \underset{\bar{h} \circ b_{k,i_*} \circ f'_k}{\overset{\tilde{h}}{\rightrightarrows}} A'$ wegen

$$\begin{array}{rcl} \tilde{h} \circ m_k \circ \mu_k & \overset{(4.1)}{=} & \tilde{h} \circ \mu'_k \circ \varphi \\ & \overset{\tilde{h}}{=} & h'_k \circ r'_k \circ \varphi \\ & \overset{(4.4)}{=} & \bar{h} \circ e'_k \circ r'_k \circ \varphi \\ & \overset{(4.1)}{=} & \bar{h} \circ b_{k,i_*} \circ f'_k \circ \mu'_k \circ \varphi \\ & \overset{(4.1)}{=} & \bar{h} \circ b_{k,i_*} \circ f'_k \circ m_k \circ \mu_k \end{array}$$

und da μ_k epimorph ist. Aber wegen $A' \perp m_k$ kommutiert dann $P'_k \underset{\bar{h} \circ b_{k,i_*} \circ f'_k}{\overset{\tilde{h}}{\rightrightarrows}} A'$. Daraus folgt

$$\begin{array}{rcl} h'_k \circ r'_k & \overset{\tilde{h}}{=} & \tilde{h} \circ \mu'_k \\ & = & \bar{h} \circ b_{k,i_*} \circ f'_k \circ \mu'_k \\ & = & \bar{h} \circ e'_k \circ r'_k \end{array}$$

Und damit gilt schließlich $h'_k(r'_k(y)) = \bar{h}(e'_k(r'_k(y)))$. \$

4.12 Bemerkung

In einer Unterkategorie $\mathbf{C}$, in der für Morphismen e, q die Implikation

$$e \text{ regulärer Epimorphismus} \Rightarrow [e, q] \text{ regulärer Epimorphismus} \tag{4.5}$$

gilt, kann man einfach ($F_{\mathbf{C}}X' \xrightarrow{e'} B$) := ($F_{\mathbf{C}}(X \amalg \tilde{X}) \xrightarrow{[e,q]} B$) setzen und für q die Coprodukt-Injektion nehmen (die Existenz eines Y' mit $\operatorname{card} Y' < \lambda$ wird dann durch 4.20 garantiert, falls $\operatorname{card} Y < \lambda$ gilt).
(4.5) gilt etwa dann, wenn $\mathbf{C}$ eine Quasivarietät ist (aber dann sind die freien Objekte ja ohnehin regulär-projektiv): Dann sind die $\mathbf{C}$-regulären Epimorphismen genau die surjektiven $\mathbf{C}$-Morphismen (denn die $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$-regulären Epimorphismen sind genau die surjektiven $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$-Morphismen [AR 3.4(2)vi], die $\mathbf{C}$-regulären Epimorphismen sind genau die Kompositionen aus $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$-regulären Epimorphismen gefolgt von Reflektionspfeilen (denn der Coadjungierte R bewahrt Coegalisatoren, und fixiert $\mathbf{C}$-Objekte (wegen 1.4(1))), und die Reflektionspfeile sind surjektiv [AR 3.19(1), 3.4(2)vii].)
Für eine λ-orthogonale Unterkategorie gilt (4.5) im allgemeinen nicht, da 1.) die obige Konstruktion dann überflüssig wäre und 2.) man ein Gegenbeispiel angeben kann: Sei $\lambda := \aleph_0$ und $\mathbf{A} := \mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ mit $\Sigma := \{p, l\}$ (unäre Operationen). Sei $\mathbf{C} := \{m\}^{\perp}$ für die Einbettung $(F_{\mathbf{A}}1/_{p0=0})_{\mathbf{A}} \xrightarrow{m} (F_{\mathbf{A}}2/_{p0=0 \wedge l1=0})_{\mathbf{A}}$. Sei $Y := \{(0, p(0))\}$, $X := 1$ und seien f, g die Projektionen. Sei $\tilde{X} := \{x\}$ und $q(x) = p(1)$. Dann ist $[e, q]$ nicht strikt, da die Einbettung

$$F_{\mathbf{C}}(1 \amalg \{x\}) \xrightarrow{m \amalg id_{F_{\mathbf{C}}\{x\}}} (F_{\mathbf{A}}(2 \amalg \{x\})/_{p0=0 \wedge l1=0})_{\mathbf{A}}$$

nicht durch $[e, q]$ faktorisiert.

4.13 Bemerkung
In der Aussage von 4.11 kann man den Morphismus $F_{\mathbf{C}}\tilde{X} \xrightarrow{q} B$ ersetzen durch eine Senke ($F_{\mathbf{C}}\tilde{X}_i \xrightarrow{q_i} B$)$_{i \in I}$ mit $\operatorname{card} I < \lambda$: Definiere ($F_{\mathbf{C}}\tilde{X} \xrightarrow{q} B$) := ($F_{\mathbf{C}} \coprod_{i \in I} \tilde{X}_i \xrightarrow{[q_i]} B$).

4.14 Lemma
Sei $\mathbf{C}$ *eine* λ*-orthogonale Unterkategorie oder eine Quasivarietät in einem* λ*-ären* $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$*. Dann ist die Klasse der* $\mathbf{C}$*-*λ*-erzeugten ≪bzw. der* $\mathbf{C}$*-*λ*-präsentierten≫ Objekte abgeschlossen unter* λ*-kleinen Colimiten.*

Beweis
(Für den Fall, daß $\mathbf{C}$ eine λ-äre Varietät ist, vergleiche [Jo p233], [BaW p158].)
Nach [AHS 12.13] reicht es, die Abgeschlossenheit unter λ-kleinen Coprodukten und Coegalisatoren zu zeigen. Die Abgeschlossenheit unter λ-kleinen Coprodukten ergibt sich daraus, daß Colimiten mit Colimiten kommutieren, $F_{\mathbf{C}}$ Coprodukte bewahrt und λ regulär ist.

Gegeben seien Coegalisatoren $F_{\mathbf{C}}Y \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} F_{\mathbf{C}}X \xrightarrow{e} B$, $F_{\mathbf{C}}\bar{Y} \underset{\bar{g}}{\overset{\bar{f}}{\rightrightarrows}} F_{\mathbf{C}}\bar{X} \xrightarrow{\bar{e}} \bar{B}$ und $\bar{B} \underset{k}{\overset{h}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{c} A$ mit $\operatorname{card} X, \operatorname{card} \bar{X} < \lambda$ «und $\operatorname{card} Y < \lambda$». Zu zeigen ist, daß A $\mathbf{C}$-λ-präsentiert ist.

Ist $\mathbf{C}$ eine λ-orthogonale Unterkategorie, so wenden wir 4.11 (vermittels 4.13) auf $(q_i) := (h \circ \bar{e}, k \circ e)$ an und erhalten einen Coegalisator $F_{\mathbf{C}}Y' \underset{g'}{\overset{f'}{\rightrightarrows}} F_{\mathbf{C}}X' \xrightarrow{e'} B$ mit $\operatorname{card} X' < \lambda$ «und $\operatorname{card} Y' < \lambda$, also auch $\operatorname{card} Y' \amalg \bar{X} < \lambda$» und Morphismen $F_{\mathbf{C}}\bar{X} \underset{\bar{k}}{\overset{\bar{h}}{\rightrightarrows}} F_{\mathbf{C}}X'$, sodaß $(F_{\mathbf{C}}\bar{X} \underset{e' \circ \bar{k}}{\overset{e' \circ \bar{h}}{\rightrightarrows}} B) = (F_{\mathbf{C}}\bar{X} \underset{k \circ \bar{e}}{\overset{h \circ \bar{e}}{\rightrightarrows}} B)$. (siehe (4.6)).

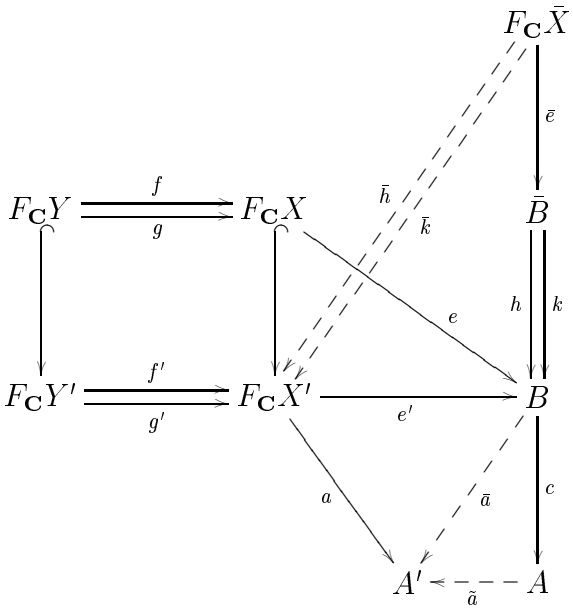
Ist $\mathbf{C}$ eine Quasivarietät, so erhalten wir $\bar{h}, \bar{k}$ mit der angegebenen Eigenschaft für

$$(F_{\mathbf{C}}Y' \underset{g'}{\overset{f'}{\rightrightarrows}} F_{\mathbf{C}}X' \xrightarrow{e'} B) := (F_{\mathbf{C}}Y \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} F_{\mathbf{C}}X \xrightarrow{e} B),$$

denn e ist surjektiv (da reguläre Epimorphismen in $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ [AR 3.4(2)vi] und die Reflektionspfeile [AR 3.19(1), 3.4(2)vii] surjektiv sind) und $F_{\mathbf{C}}\bar{X}$ ist surjektiv-projektiv [AHS 9.29].

Dann ist $F_{\mathbf{C}}(Y' \amalg \bar{X}) \underset{[g', \bar{k}]}{\overset{[f', \bar{h}]}{\rightrightarrows}} F_{\mathbf{C}}X' \xrightarrow{c \circ e'} A$ ein $\mathbf{C}$-Coegalisator: $c \circ e'$ ist epimorph als Komposition von Epimorphismen. Gegeben sei $F_{\mathbf{C}}X' \xrightarrow{a} A'$ mit $a \circ [f', \bar{h}] = a \circ [g', \bar{k}]$.

(4.6)



Es folgt $a \circ f' = a \circ g'$ (per Komposition mit der ersten Coprodukt-Injektion),

also existiert $B \xrightarrow{\bar{a}} A'$, sodaß $\bar{a} \circ e' = a$ (da e' Coegalisator ist). Damit gilt

$$\begin{aligned} \bar{a} \circ h \circ \bar{e} &= \bar{a} \circ e' \circ \bar{h} \\ &= a \circ \bar{h} \\ &= a \circ \bar{k} \\ &= \bar{a} \circ e' \circ \bar{k} \\ &= \bar{a} \circ k \circ \bar{e}, \end{aligned}$$

also $\bar{a} \circ h = \bar{a} \circ k$ ($\bar{e}$ ist Epimorphismus). Somit existiert $A \xrightarrow{\tilde{a}} A'$, sodaß $\bar{a} = \tilde{a} \circ c$, also $a = \tilde{a} \circ c \circ e'$. \$

4.15 Bemerkung

(1) λ-kleine Colimiten von λ-präsentierbaren «bzw. λ-erzeugbaren» Objekten sind λ-präsentierbar «bzw. λ-erzeugbar» ([GU 6.2], [AR 1.3,1.16]).

(2) Retrakte von λ-präsentierten Objekten in λ-direktive reflektiven (und somit lokal λ-präsentierbaren - siehe auch 4.17) Unterkategorien von λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ sind (im Gegensatz zu λ-orthogonalen Unterkategorien, siehe 4.14) im allgemeinen nicht einmal λ-erzeugt (siehe 4.24(2)) !!!

(3) Reguläre Quotienten von λ-präsentierten Objekten in λ-orthogonalen Unterkategorien von λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ sind (λ-erzeugbar (siehe (4)), aber) im allgemeinen nicht λ-erzeugt: Sei $\lambda := \aleph_0$, $\mathbf{A} := \mathbf{Alg}\,\Sigma$ mit $\Sigma := \{p, q, l\}$ (unäre Operationen), $\mathbf{C} := \{m\}^{\perp}$ für die Einbettung $(F_{\mathbf{A}}1/_{p0=0})_{\mathbf{A}} \xrightarrow{m} (F_{\mathbf{C}}2/_{l1=0=p0 \wedge p1=1})_{\mathbf{A}}$. $B := (F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}/_{\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} l(n+1)=n=pn})_{\mathbf{A}}$ $(= (F_{\mathbf{C}}1/_{p0=0})_{\mathbf{C}})$ ist endlich $\mathbf{C}$-präsentiert, aber

$$A := (B/_{\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} qn=n})_{\mathbf{C}} = (F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}/_{\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} l(n+1)=n=pn=qn})_{\mathbf{A}}$$

ist nicht endlich $\mathbf{C}$-erzeugt (siehe auch 4.24(5)).
Es folgt, daß in 4.11 $\operatorname{card} \tilde{X} < \lambda$ notwendig ist.

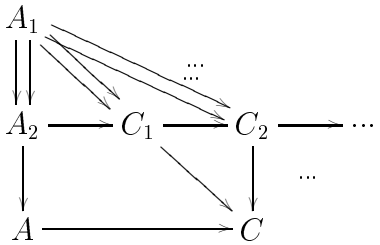
(4) Starke Quotienten von schwach λ-erzeugbaren Objekten sind schwach λ-erzeugbar. Analoges gilt in kovollständigen Kategorien mit einem λ-erzeugbaren Generator für λ-erzeugbare Objekte ([GU 6.7d], [AR 1.69i]). Somit ist in jedem λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ die Klasse der λ-erzeugbaren (=schwach λ-erzeugbaren=λ-erzeugten=..., siehe 4.4 und 4.8) Objekte sogar abgeschlossen unter (Epi-)Quotienten (alle Epimorphismen sind dort stark [AR 3.4(2)vii]).

(5) (Epi-)Quotienten von λ-präsentierten (=λ-präsentierbaren=..., siehe 4.8) Objekten in Varietäten sind im allgemeinen nicht λ-erzeugt (=λ-erzeugbar=...) (vergleiche $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ in **Rng** [AHS 7.40(5)]). Ein (Epi-)Quotient eines Objektes, das schwach vom Typ λ ist, ist ebenfalls schwach vom Typ λ [Bre 1.4a].

(6) Unterobjekte von endlich präsentierten Objekten in finitären Varietäten sind im allgemeinen nicht einmal endlich erzeugt:

- Für den (kommutativen unitären) Polynomring $R := k[x_0, x_1, ...]$ (für einen Körper k) gilt $R = F_{\mathbf{R-Mod}}1$, aber $(x_0, x_1, ...) \subseteq R$ ist nicht endlich erzeugt.
- Der freie Verband über drei Erzeugende $F_{\mathbf{Lat}}3$ enthält $F_{\mathbf{Lat}}\mathbb{N}$ ([Sk p101], [Jo p31], [Lan]).
- In **Mon** ist $< xy, xxy, ... > \subseteq F_{\mathbf{Mon}}\{x, y\}$ nicht endlich erzeugt.
- Jede abzählbare Gruppe, die eine Präsentation mit einer rekursiv abzählbaren Menge von Relatoren besitzt (etwa $F_{\mathbf{Grp}}\mathbb{N}$), kann in eine endlich präsentierte Gruppe eingebettet werden (Higman [Rob p419], [C81 p155]). (Außerdem kann jede abzählbare Gruppe in eine Gruppe mit zwei Generatoren eingebettet werden (Higman, Neumann, Neumann [Rob 6.4.7]).)
- Untergruppen von endlich erzeugten abelschen Gruppen sind endlich erzeugt [H 96].

(7) λ-Coprodukte λ-kleiner Objekte sind λ-klein, aber endliche Colimiten endlich-kleiner Objekte sind im allgemeinen nicht endlich-klein: Betrachte die Kategorie



4.16 Proposition
Sei **C** *eine λ-orthogonale Unterkategorie oder eine Quasivarietät in einer Kategorie der Form* $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ *für eine Sortenmenge* $\mathcal{S}$ *und eine λ-äre Signatur τ. Dann ist jedes* **C**-λ-*kleine Objekt A* **C**-λ-*präsentiert.*

Beweis
Nach dem Beweis von 4.21 ist A Retrakt eines **C**-λ-präsentierten Objektes und somit nach 4.14 selbst **C**-λ-präsentiert. Vergleiche auch [BH p159f], [P V.21]. \$

4.17 Bemerkung
Jede lokal λ-präsentierbare Kategorie ist λ-orthogonale Unterkategorie eines λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ (siehe 3.5(6)(2.10)). In Zusammenhang mit 4.16 ist dies allerdings leider nicht von Nutzen: Zu einem gegebenen λ-präsentierbaren regulären Generator $\mathcal{G}$ einer lokal λ-präsentierbaren Kategorie $\mathbf{C}$ läßt sich $\mathbf{C}$ nämlich im allgemeinen nicht so als λ-orthogonale Unterkategorie mit einer Einbettung E in ein λ-äres $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ einbetten, daß $E\mathcal{G}$ die freien $\mathbf{C}$-Objekte (bezüglich $U_{\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau}\circ E$) über weniger als λ Erzeugenden enthält (denn daraus würde mit 4.16 folgen, daß es für ein λ-präsentierbares Objekt $A\in\mathbf{C}$ einen Coegalisator

$$\coprod_{j\in J} G_j \rightrightarrows \coprod_{i\in I} G_i \longrightarrow A$$

mit $G_i, G_j \in \mathcal{G}$ und $\operatorname{card} I, \operatorname{card} J < \lambda$ gibt (im Widerspruch zu 4.23)). Vielmehr sind bei der Konstruktion in [AR 3.5(3)] die freien $\mathbf{C}$-Objekte (bezüglich $U_{\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau}\circ E$) über weniger als λ Erzeugenden genau die λ-präsentierbaren Objekte.

4.2.2 Extremal λ-erzeugte Objekte in λ-direktiven reflektiven Unterkategorien eines λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ sind λ-kompakt

Hier wird gezeigt, daß in der Konstruktion der Zerlegung eines Morphismus in extremale Epimorphismen mithilfe von Colimiten von Ketten in [GU 1.5] in λ-direktiven reflektiven Unterkategorien von Kategorie der Form $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ für λ-äre Signaturen τ λ-gerichtete Colimiten bewahrt werden (siehe 4.18.α). Dies wird verwendet, um zu zeigen, daß extremal λ-erzeugte Objekte in λ-direktiven reflektiven Unterkategorien eines λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ λ-kompakt sind (das ist 4.8: e $\overset{D}{\Rightarrow}$ d).

4.18 Proposition
Extremal λ-erzeugte Objekte in λ-direktiven reflektiven Unterkategorien von Kategorien der Form $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ für λ-äre Signaturen τ sind λ-kompakt.

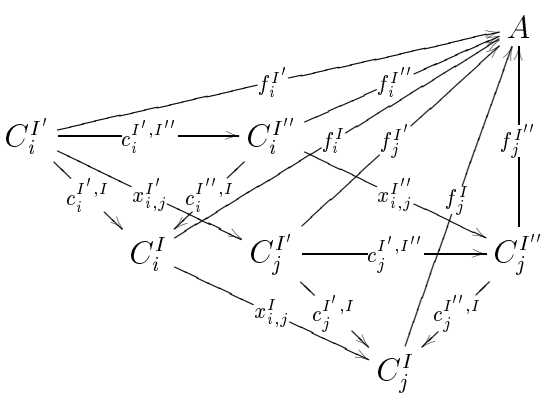
Beweis
Sei $\mathbf{C}$ eine λ-direktive reflektive Unterkategorie eines λ-ären $\mathbf{A}{:=}\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$, $A\in\mathbf{C}$. Sei $(\,A_i \xrightarrow{f_i} A\,)_{i\in I}$ eine $\mathbf{C}$-extremale Epi-Senke. Für jedes $I'\in\mathcal{I}'$ (mit $\mathcal{I} := \{I'\subseteq I : I' < \lambda\}$ und $\mathcal{I}' := \mathcal{I}\cup\{I\}$) haben wir für $B_{I'} := \coprod_{i\in I'} A_i$ einen faktorisierenden Morphismus $f_{I'} := [f_i]_{i\in I'}$ (und nach [AHS 10.13] ist f_I $\mathbf{C}$-extremal

epimorph), und es ist $(B_{I'} \xrightarrow{b_{I',I}} B_I)_{I' \in \mathcal{I}}$ mit $b_{I',I} := [\mu_i]_{i \in I'}$ für die B_I-Coproduktinjektionen μ_i eine **C**-Colimes-Senke (zum λ-gerichteten Diagramm mit den Diagramm-Morphismen $(B_{I'} \xrightarrow{b_{I',I''}} B_{I''}) := [\mu_i]_{i \in I'}$ für $I' \subseteq I'' \in \mathcal{I}$ und die $B_{I''}$-Coproduktinjektionen μ_i).
Wir zerlegen nun den Morphismus $f_{I'}$ in extremale Epimorphismen:

4.18.α Lemma

In **C** *existieren für* $i \in$ **Ord** **C**-*Colimes-Senken* $\mathcal{S}_i = (C_i^{I'} \xrightarrow{c_i^{I',I}} C_i^I)_{I' \in \mathcal{I}}$ *zu Diagrammen* $(C_i^{I'} \xrightarrow{c_i^{I',I''}} C^{I''})_{I',I'' \in \mathcal{I}}$ *und bezüglich des Diagramms natürliche Senken* $(C_i^{I'} \xrightarrow{f_i^{I'}} A)_{I' \in \mathcal{I}}$ *mit faktorisierendem Morphismus* $(C_i^I \xrightarrow{f_i^I} A) = [f_i^{I'}]_{I' \in \mathcal{I}}$, *sowie für* $i, j \in$ **Ord** *und* $I' \in \mathcal{I}'$ *existieren Morphismen* $C_i^{I'} \xrightarrow{x_{i,j}^{I'}} C_j^{I'}$, *sodaß*

- $C_0^{I'} = B_{I'}$ *und* $f_0^{I'} = f_{I'}$ *für* $I' \in \mathcal{I}'$, *sowie* $c_0^{I',I''} = b_{I',I''}$ *für* $I' \in \mathcal{I}, I'' \in \mathcal{I}'$,
- *die* $x_{i,j}^{I'}$ *für* $I' \in \mathcal{I}'$ *und* $i, j \in$ **Ord** **C**-*extremal-epimorph sind, und für* $I', I'' \in \mathcal{I}'$ *und* $i, j \in$ **Ord** *gilt:* $x_{i,j}^{I''} \circ c_i^{I',I''} = c_j^{I',I''} \circ x_{i,j}^{I'}$,
- *für jedes* $i \in$ **Ord** *und* $I' \in \mathcal{I}'$ $x_{i,i+1}^{I'}$ *ein* **C**-*regulärer Epimorphismus ist,*
- *für jede Limeszahl* $l \in$ **Ord** *und* $I' \in \mathcal{I}'$ $(C_i^{I'} \xrightarrow{x_{i,l}^{I'}} C_l^{I'})_{i<l}$ *eine* **C**-*Colimes-Senke zum Diagramm der* $(C_i^{I'} \xrightarrow{x_{i,j}^{I'}} C_j^{I'})_{i,j<l}$ *ist,*
- *für jedes* $i \in$ **Ord** *und* $I' \in \mathcal{I}'$ *gilt:* $f_i^{I'} \circ x_{0,i}^{I'} = f_0^{I'}$ *und*
- *ein* $i_* \in$ **Ord** *existiert, sodaß* $f_{i_*}^I$ *ein Isomorphismus ist (also die Konstruktion dort stationär wird).*



Beweis
Dies ist im wesentlichen die Zerlegung in [GU 1.5] (siehe auch [GU 6.6b]), aber expliziter, um zeigen zu können, daß die Colimiten während der Konstruktion bewahrt werden.

- Sei $C_0^{I'} := B_{I'}$ und $f_0^{I'} := f_{I'}$ für $I' \in \mathcal{I}'$, sowie $c_0^{I',I''} := b_{I',I''}$ für $I' \in \mathcal{I}, I'' \in \mathcal{I}'$.

- Für $i \in \mathbf{Ord}$ und $I' \in \mathcal{I}'$ sei $C_i^{I'} \xrightarrow{e_i^{I'}} D_i^{I'} \xhookrightarrow{m_i^{I'}} A$ die $\mathbf{A}$-(RegEpi, Mono)-Faktorisierung von $f_i^{I'}$. Es gilt für $I' \in \mathcal{I}, I'' \in \mathcal{I}'$: $m_i^{I'} \circ e_i^{I'} = c_i^{I',I''} \circ e_i^{I''} \circ m_i^{I''}$ wegen der Natürlichkeit von $(f_i^{I'})_{I' \in \mathcal{I}}$. Sei dann $d_i^{I',I''}$ der (laut Diagonalisierungseigenschaft der (RegEpi, Mono)-Kategorie $\mathbf{A}$ eindeutig existierende) Morphismus mit $d_i^{I',I''} \circ e_i^{I'} = e_i^{I''} \circ c_i^{I',I''}$ (und $m_i^{I''} \circ d_i^{I',I''} = m_i^{I'}$):

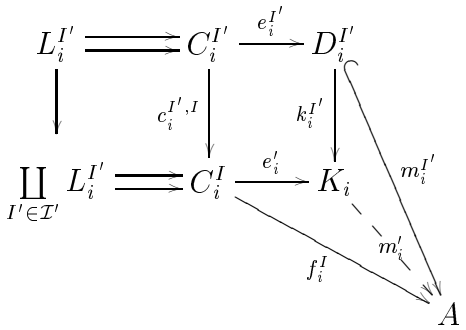
$$\begin{array}{ccc} C_i^{I'} & \xrightarrow{e_i^{I'}} & D_i^{I'} \\ {\scriptstyle e_i^{I''} \circ c_i^{I',I''}}\downarrow & \swarrow {\scriptstyle d_i^{I',I''}} & \downarrow {\scriptstyle m_i^{I'}} \\ D_i^{I''} & \xrightarrow[m_i^{I''}]{} & A \end{array}$$

Sei $(D_i^{I'} \xrightarrow{k_i^{I'}} K_i)_{I' \in \mathcal{I}}$ der $\mathbf{A}$-Colimes des λ-gerichteten Diagramms der $D_i^{I'} \xrightarrow{d^{I',I''}} D_i^{I''}$. Dann gilt

$$(D_i^{I'} \xrightarrow{k_i^{I'}} K_i)_{I' \in \mathcal{I}} \cong (D_i^{I'} \xrightarrow{d_i^{I',I}} D_i^{I})_{I' \in \mathcal{I}}$$

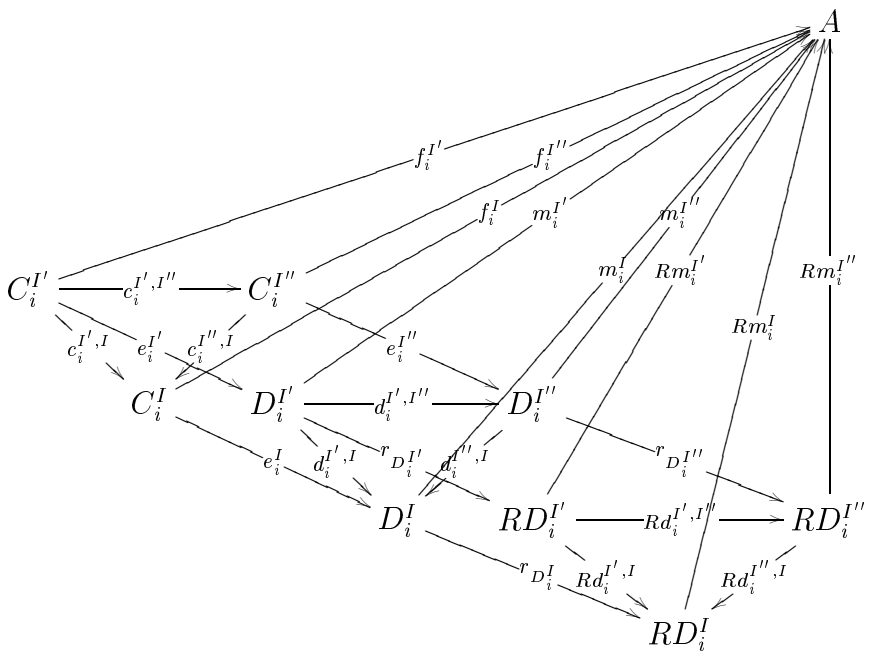
wegen der Eindeutigkeit der $\mathbf{A}$-(RegEpi, Mono)-Faktorisierung von f_i^I: Der $\mathbf{A}$-Colimes $C_i^I \xrightarrow{e_i'} K_i$ der $e_i^{I'}$ $(I' \in \mathcal{I})$ ist $\mathbf{A}$-regulärer Epimorphismus (wie im Beweis von [AHS 10.36], aber mit dem Kernpaar $\coprod_{I' \in \mathcal{I}'} L_i^{I'} \underset{[c_i^{I',I} \circ q_i^{I'}]}{\overset{[c_i^{I',I} \circ p_i^{I'}]}{\rightrightarrows}} C_i^I$, wobei für jedes i $L_i^{I'} \underset{q_i^{I'}}{\overset{p_i^{I'}}{\rightrightarrows}} C_i^{I'}$ Kernpaar von e_i' ist). Der faktorisierende Morphismus $(K_i \xrightarrow{m_i'} A) := [m_i^{I'}]_{I' \in \mathcal{I}}$ ist Monomorphismus nach 3.7 (dies ist die einzige Stelle im Beweis des Lemmas, in der die λ-Direktivität der reflektiven Unterkategorie $\mathbf{C}$ eingeht, vgl. auch 4.9(5)). Und es gilt $f_i^I = m_i' \circ e_i'$ nach Konstruktion, da $(c_i^{I',I})_{I' \in \mathcal{I}}$

eine Epi-Senke ist.



Also gilt

$$(C_i^I \xrightarrow{e_i^I} D_i^I \xhookrightarrow{m_i^I} A) \cong (C_i^I \xrightarrow{e_i'} K_i \xhookrightarrow{m_i'} A).$$

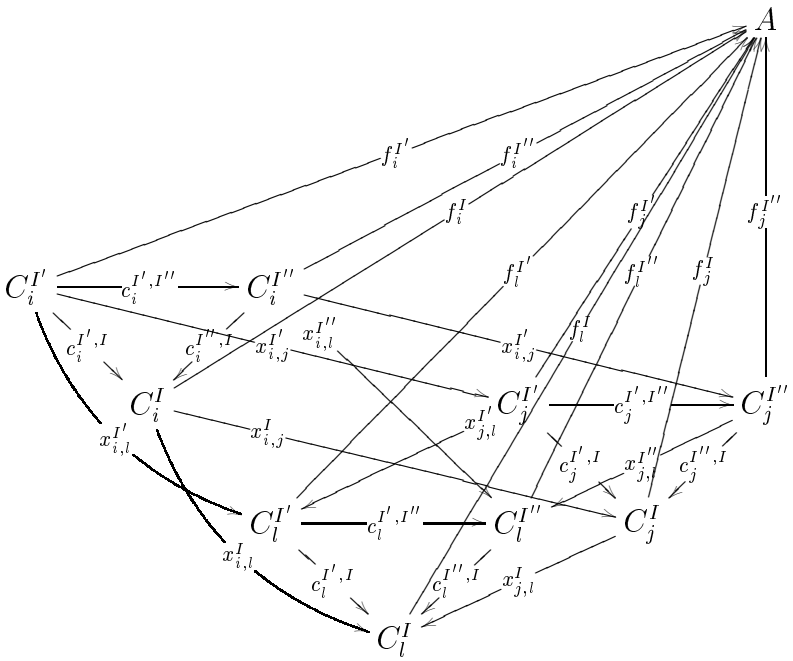


Sei dann $C_{i+1}^{I'} := RD_i^{I'}$, $x_{i,i+1}^{I'} = r_{D_i^{I'}} \circ e_i^{I'}$, $f_{i+1}^{I'} := Rm_i^{I'}$ und $c_{i+1}^{I',I''} := Rd_i^{I',I''}$ für $I' \in \mathcal{I}'$. Da der Reflektor R Colimiten bewahrt, ist dann $(c_{i+1}^{I',I})_{I'\in\mathcal{I}}$ Colimes-Senke zum Diagramm der $(c_{i+1}^{I',I''})_{I',I''\in\mathcal{I}}$ (und somit $x_{i,i+1}^I$ Colimes der $x_{i,i+1}^{I'}$ ($I' \in \mathcal{I}$), wegen $c_{i+1}^{I',I''} \circ x_{i,i+1}^{I'} = x_{i,i+1}^{I''} \circ c_i^{I',I''}$ für $I' \in \mathcal{I}$ und $I' \in \mathcal{I}'$). Außerdem ist $(f_{i+1}^{I'})_{I'\in\mathcal{I}}$ natürlich bezüglich des Diagramms (denn der Funktor R bewahrt Komposition), und f_{i+1}^I ist der faktorisierende Morphismus vom $\mathbf{C}$-Colimes (da R den Colimes bewahrt und wegen $m_i^I \cong m_i'$).

Für $j < i$ sei

$$(C_j^{I'} \xrightarrow{x_{j,i+1}^{I'}} C_{i+1}^{I'}) := (C_j^{I'} \xrightarrow{x_{j,i}^{I'}} C_i^{I'} \xrightarrow{x_{i,i+1}^{I'}} C_{i+1}^{I'}).$$

- Für eine Limeszahl $l \neq 0$ sei (für $I' \in \mathcal{I}'$) $(C_i^{I'} \xrightarrow{x_{i,l}^{I'}} C_l^{I'})_{i<l}$ der **C**-Colimes des λ -gerichteten Diagramms der $(C_i^{I'} \xrightarrow{x_{i,j}^{I'}} C_j^{I'})_{i,j<l}$ und $f_l^{I'} := [f_i^{I'}]_{i<l}$. Sei (für $I' \in \mathcal{I}, I'' \in \mathcal{I}'$) $C_l^{I'} \xrightarrow{c_l^{I',I''}} C_l^{I''}$ der Colimes der $(C_i^{I'} \xrightarrow{c_i^{I',I''}} C_i^{I''})_{i<l}$. Da Colimiten kommutieren [ML p227], ist $(C_l^{I'} \xrightarrow{c_l^{I',I}} C_l^{I})_{I' \in \mathcal{I}}$ Colimes-Senke zum Diagramm $(C_l^{I'} \xrightarrow{c_l^{I',I''}} C_l^{I''})_{I',I'' \in \mathcal{I}}$. (und $x_{i,l}^{I}$ Colimes der $x_{i,l}^{I'}$ $(I' \in \mathcal{I})$, sowie $c_l^{I',I''} \circ x_{i,l}^{I'} = x_{i,l}^{I''} \circ c_i^{I',I''}$ für $I' \in \mathcal{I}$ und $I' \in \mathcal{I}'$). Außerdem folgt daraus, daß $(f_l^{I'})_{I' \in \mathcal{I}}$ natürlich bezüglich des Diagramms ist, und f_l^I ist der faktorisierende Morphismus vom **C**-Colimes.



C ist well-powered (da $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ es ist [AR 3.4(3)], **C**-Monomorphismen **A**-Monomorphismen sind (1.10(1)) und die Einbettung Isomorphismen erzeugt). Also existieren $i < j \in \mathbf{Ord}$, sodaß $m_i^I \cong m_j^I$, das heißt es existiert ein Isomorphismus h, sodaß $m_i^I = m_j^I \circ h$. Somit ist $e_j^I \circ x_{i+1,j}^I \circ r_{D_i^I}$ ein Isomorphismus wegen

$$m_j^I \circ h = m_i^I = m_j^I \circ e_j^I \circ x_{i+1,j}^I \circ r_{D_i^I}$$

nach Konstruktion und da m_j^I ein Monomorphismus ist. Damit ist D_i^I Retrakt von RD_i^I und somit in $\mathbf{C}$ [AHS 13.27]. Nun ist aber

$$\begin{aligned} m_i^I \circ e_i^I \circ x_{0,i}^I &= f_i^I \circ x_{0,i}^I \\ &= f_0^I \\ &= f^I \end{aligned}$$

nach obiger Bemerkung ein $\mathbf{C}$-extremaler Epimorphismus, also ist m_i^I ein Isomorphismus. Somit ist, für $i_* := i+1$, $f_{i_*}^I = Rm_i^I$ ein Isomorphismus.
Wir zeigen nun induktiv, daß die $x_{i,i+\alpha}^{I'}$ (für jede $i, \alpha \in \mathbf{Ord}$, und $I' \in \mathcal{I}'$) $\mathbf{C}$-extremale Epimorphismen sind:

α=1: Per Konstruktion ist $x_{i,i+1}^{I'}$ $\mathbf{C}$-regulärer Epimorphismus.

$\alpha \rightsquigarrow \alpha+1$: $\mathbf{C}$-extremale Epimorphismen komponieren (siehe 3.11(1)).

α Limeszahl: $x_{i,i+\alpha}^{I'}$ ist Colimes der extremal-epimorphen $x_{i,i+j}^{I'}$ mit $j < \alpha$, und als solcher extremal-epimorph (siehe 3.14). (\$)

Sei A nun $\mathbf{C}$-extremal λ -erzeugt, nach 4.7 existiert also $X \in \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$ mit $\operatorname{card} X < \lambda$, sowie ein $\mathbf{C}$-extremaler Epimorphismus $F_{\mathbf{C}}X \xrightarrow{g} A \cong C_{i_*}^I$. Da $\mathbf{C}$ λ-direktiv ist, und $\operatorname{card} X < \lambda$, ist $F_{\mathbf{C}}X$ λ-präsentierbar. Da $C_{i_*}^I$ $\mathbf{C}$-Colimes der $C_{i_*}^{I'}$ $(I' \in \mathcal{I})$ ist, existieren $I' \in \mathcal{I}$ und $F_{\mathbf{C}}X \xrightarrow{g'} C_{i_*}^{I'}$, sodaß $g = c_{i_*}^{I',I} \circ g'$. Es gilt

$$\begin{aligned} f^{I'} &= f_0^{I'} \\ &= f_{i_*}^{I'} \circ x_{0,i_*}^{I'} \\ &= f_{i_*}^I \circ c_{i_*}^{I',I} \circ x_{0,i_*}. \end{aligned}$$

$c_{i_*}^{I',I}$ ist nach [AHS 7.62(2)] ein $\mathbf{C}$-extremaler Epimorphismus, da g einer ist. Nach 3.11(1) sind $\mathbf{C}$-extremale Epimorphismen kompositionsabgeschlossen, also ist $f^{I'}$ als Komposition $\mathbf{C}$-extremaler Epimorphismen $\mathbf{C}$-extremal epimorph. Somit ist $(f_i)_{i \in I'}$ nach [AHS 10.26] eine $\mathbf{C}$-extremale Epi-Senke. \$

4.19 Bemerkung

Analog zu 4.18 haben Epi-Senken zu "epimorph λ-erzeugten" Objekten A (das heißt, es existieren $X \in \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$ und ein erzeugender Morphismus $X \longrightarrow A$) in einer λ-direktiven reflektiven Unterkategorie $\mathbf{C}$ eines λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ Teil-Epi-Senken von Kardinalität $< \lambda$. Beweis-Skizze (vgl. auch den Beweis zu 4.18): Sei $F_{\mathbf{C}}X \xrightarrow{g} A$ ein Epimorphismus (vgl. [AHS 8.36]) mit $X \in \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$ und $\operatorname{card} C < \lambda$,

sei $\coprod_{i \in I} A_i \xrightarrow{[f_i]_{i \in I}} A$ ein $\mathbf{C}$-Epimorphismus und sei für $I' \in \mathcal{I}$

$$({}^2A/_{\coprod_{i \in I'} A_i})_{\mathbf{C}} := ({}^2A/_{\bigwedge_{a \in [f_i]_{i \in I'}[\coprod_{i \in I'} A_i]} \mu_1(a) = \mu_2(a)})_{\mathbf{C}}$$

(mit den Coproduktinjektionen μ_i). Dann gilt nach [AHS 11.16,11.11] $A \cong ({}^2A/_{\coprod_{i\in I} A_i})_{\mathbf{C}}$, somit ist A λ-gerichteter Colimes der $({}^2A/_{\coprod_{i\in I'} A_i})_{\mathbf{C}}$ $(I' \in \mathcal{I})$. Also existiert (wegen der $\mathbf{C}$-λ -Präsentierbarkeit von $F_{\mathbf{C}}X$) $I' \in \mathcal{I}$, sodaß $F_{\mathbf{C}}X \xrightarrow{g} A \underset{h_2}{\overset{h_1}{\rightrightarrows}} ({}^2A/_{\coprod_{i\in I'} A_i})_{\mathbf{C}}$ kommutiert (wobei $h_i = q \circ \mu_i$ für den Quotienten q ist), und damit auch $A \underset{h_2}{\overset{h_1}{\rightrightarrows}} ({}^2A/_{\coprod_{i\in I'} A_i})_{\mathbf{C}}$, da g Epimorphismus ist. Da aber $A \underset{\mu_2}{\overset{\mu_1}{\rightrightarrows}} {}^2A \xrightarrow{[id_A, id_A]} A$ Coegalisator ist, existiert ein (eindeutiges) k mit $({}^2A \longrightarrow ({}^2A/_{\coprod_{i\in I'} A_i})_{\mathbf{C}}) = k \circ [id_A, id_A]$. Aufgrund der Konstruktion des regulären Epimorphismus ${}^2A \longrightarrow ({}^2A/_{\coprod_{i\in I'} A_i})_{\mathbf{C}}$ existiert außerdem ein (eindeutiges) k' mit $k' \circ ({}^2A \longrightarrow ({}^2A/_{\coprod_{i\in I'} A_i})_{\mathbf{C}}) = [id_A, id_A]$, und aufgrund der Universalität sind k und k' einander invers. Es gilt also $A \cong ({}^2A/_{\coprod_{i\in I'} A_i})_{\mathbf{C}}$, also ist $[f_i]_{i\in I'}$ Epimorphismus (wiederum nach [AHS 11.16]).

4.3 Über ein Problem von Gabriel und Ulmer

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß λ-präsentierbare Objekte in λ-direktiven reflektiven Unterkategorien von λ-ären $\mathbf{Alg}_S\tau$ im allgemeinen nicht λ-präsentiert sind, und damit gleichzeitig die in [GU 7.7e] erwähnte Fragestellung negativ beantwortet.

4.20 Proposition (GU 6.6e)
Sei $\mathbf{A}$ *covollständig mit dem λ-präsentierbaren Generator $\mathcal{G}$, $A \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{A}$ sei λ-präsentierbar und $A \xrightarrow{q} B$ regulärer Epimorphismus (vergleiche 1.12). B ist genau dann λ-präsentierbar, wenn es einen Coegalisator*

$$\coprod_{i\in I} G_i \rightrightarrows A \xrightarrow{q} B$$

gibt mit $\mathrm{card}\, I < \lambda$ *und $G_i \in \mathcal{G}$ (für $i \in I$).* \$

4.21 Proposition (GU 7.6)
Sei $\mathbf{A}$ *lokal präsentierbar, $\mathcal{G}$ ein λ-präsentierbarer regulärer Generator (vergleiche 1.12) und $A \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{A}$.*
A ist genau dann λ-präsentierbar, wenn es einen Coegalisator

$$\coprod_{j\in J} G_j \rightrightarrows \coprod_{i\in I} G_i \longrightarrow B$$

mit $G_i, G_j \in \mathcal{G}$ und $\operatorname{card} I, \operatorname{card} J < \lambda$ gibt, sodaß A Retrakt von B ist.
Sind die regulären Epimorphismen abgeschlossen unter Komposition, so ist ein λ-präsentierbares A sogar selbst Coegalisator eines solchen Paares.

Beweis

$\Leftarrow$: Ein λ-kleiner Colimes λ-präsentierbarer Objekte ist λ-präsentierbar [AR 1.16].

$\Rightarrow$: (Vergleiche auch [BH p159§2].) Sei A λ-präsentierbar. Nach Definition eines schwach regulären Generators existiert ein Coegalisator $\coprod_{j\in J} G_j \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} \coprod_{i\in I} G_i \xrightarrow{e} A$ mit $G_i, G_j \in \mathcal{G}$. $\coprod_{i\in I} G_i$ ist kanonischer Colimes der Teilcoprodukte $\coprod_{i\in I'} G_i$ ($I'\subseteq I$ mit $\operatorname{card} I' < \lambda$). Da die G_j λ-präsentierbar sind, existiert also für jedes $j \in J$ existiert ein $I_j\subseteq I$ mit $\operatorname{card} I_j < \lambda$ und f_j, g_j, sodaß

$$\begin{array}{ccc} G_j & \overset{f_j}{\underset{g_j}{\rightrightarrows}} & \coprod_{i\in I_j} G_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{j\in J} G_j & \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} & \coprod_{i\in I} G_i \end{array}$$

kommutiert. Sei nun

$$\mathcal{K} := \{(I', J') : J'\subseteq J \wedge \bigcup_{j\in J'} I_j \subseteq I'\subseteq I \wedge \operatorname{card} J', I' < \lambda\}$$

Für $I', J' \in K$ seien

$$(\coprod_{j\in J'} G_j \overset{f_{I',J'}}{\underset{g_{I',J'}}{\rightrightarrows}} \coprod_{i\in I'} G_i) := (\coprod_{j\in J'} G_j \overset{[f_j]}{\underset{[g_j]}{\rightrightarrows}} \coprod_{i\in \bigcup_{j\in J'} I_j} G_i \longrightarrow \coprod_{i\in I'} G_i)$$

und sei $\coprod_{j\in J'} G_j \overset{f_{I',J'}}{\underset{g_{I',J'}}{\rightrightarrows}} \coprod_{i\in I'} G_i \xrightarrow{c_{I',J'}} A_{I',J'}$ ein Coegalisator. Für (I', J') und

(I'', J'') in $\mathcal{K}$ mit $I' \subseteq I''$ und $J' \subseteq J''$ existiert dann $h^{I',J'}_{I'',J''}$, sodaß

$$\begin{array}{ccccc} \coprod_{j\in J'} G_j & \overset{f_{I',J'}}{\underset{g_{I',J'}}{\rightrightarrows}} & \coprod_{i\in I'} G_i & \xrightarrow{c_{I',J'}} & A_{I',J'} \\ \downarrow & & \downarrow & & \vdots \\ & & & & h^{I',J'}_{I'',J''} \\ & & & & \vdots \\ \coprod_{j\in J''} G_j & \overset{f_{I'',J''}}{\underset{g_{I'',J''}}{\rightrightarrows}} & \coprod_{i\in I''} G_i & \xrightarrow{c_{I'',J''}} & A_{I',J'} \end{array}$$

kommutiert. Da Colimiten mit Coegalisatoren kommutieren, ist A der Colimes des λ-gerichteten Diagramms der $(A_{I',J'} \xrightarrow{h^{I',J'}_{I'',J''}} A_{I'',J''})$. Da A nach Voraussetzung λ-präsentierbar ist, faktorisiert id_A durch $A_{I',J'}$ für ein $(I', J') \in \mathcal{K}$, somit hat A die gewünschte Darstellung.
Der zweite Teil folgt aus 4.20. \$

4.22 Bemerkung

(1) Wie aus dem Beweis ersichtlich, gilt obige Proposition auch, wenn $\mathcal{G}$ lediglich ein λ-präsentierbarer schwach regulärer Generator ist.

(2) Für eine allgemeinere Charakterisierung λ-präsentierbarer Objekte vergleiche [MaPar 2.3.11].

(3) In [GU 7.7e] geben Gabriel und Ulmer an, sie hätten kein Beispiel für ein Objekt A in einer covollständigen Kategorie $\mathbf{A}$ mit λ-präsentierbarem regulären Generator $\mathcal{G}$ gefunden, sodaß A λ-präsentiert ist, es aber keinen Coegalisator

$$\coprod_{j\in J} G_j \rightrightarrows \coprod_{i\in I} G_i \longrightarrow A$$

mit $G_i, G_j \in \mathcal{G}$ und $\operatorname{card} I, \operatorname{card} J < \lambda$ gibt. Dies wirft die Frage auf, ob jedes λ-präsentierbare A eine solche Darstellung besitzt. Diese Frage wird mit dem folgenden Beispiel negativ beantwortet.

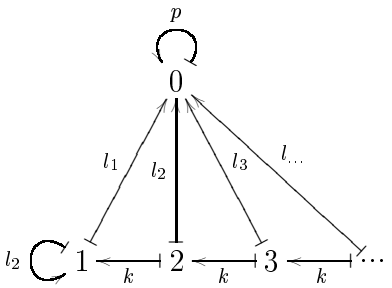
4.23 Beispiel (Antwort auf GU 7.7e)
Es existiert eine lokal λ-präsentierbare Kategorie $\mathbf{C}$ mit einem λ-präsentierbaren regulären Generator $\mathcal{G}$ und einem λ-präsentierbarem $A \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$, sodaß es keinen Coegalisator

$$\coprod_{j\in J} G_j \rightrightarrows \coprod_{i\in I} G_i \longrightarrow A$$

mit $G_i, G_j \in \mathcal{G}$ und $\operatorname{card} I, \operatorname{card} J < \lambda$ gibt.

Beweis
Seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{C}$ wie in 2.6, $\mathcal{G}:=\{F_{\mathbf{C}}1\}$ und

$$A := (F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}/_{(p0=0\wedge l_2 1=1\wedge \bigwedge\limits_{n>0}(l_n n=0\wedge k(n+1)=n))})_{\mathbf{A}}. \tag{4.7}$$



$\mathbf{C}$ ist eine endlich-direktive Unterkategorie (siehe 2.6) der lokal endlich präsentierbaren Kategorie $\mathbf{A}$ [AR 3.4(6)], somit ist $\mathbf{C}$ lokal endlich präsentierbar (siehe 2.9). $\mathcal{G}$ ist regulärer Generator nach 1.19 und 1.13. $F_{\mathbf{C}}1$ ist $\mathbf{C}$-endlich präsentierbar (wegen 2.1), weil $F_{\mathbf{A}}1$ $\mathbf{A}$-endlich präsentierbar ist [AHS 11.28(4)] und $\mathbf{C}$ endlich-direktiv ist. $(F_{\mathbf{C}}1/_{p0=0})_{\mathbf{C}}$ ist $\mathbf{C}$-endlich präsentierbar (nach 2.3) und somit auch (vgl. 1.8)

$$A = ((F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}/_{p0=0\wedge \bigwedge\limits_{n>0}(l_n n=0\wedge k(n+1)=n))})_{\mathbf{A}}/_{l_2 1=1})_{\mathbf{A}} \tag{4.8}$$

wegen

$$(F_{\mathbf{A}}\mathbb{N}/_{p0=0\wedge \bigwedge\limits_{n>0}(l_n n=0\wedge k(n+1)=n))})_{\mathbf{A}} = (F_{\mathbf{C}}1/_{p0=0})_{\mathbf{C}}. \tag{4.9}$$

Es bleibt zu zeigen, daß es keinen $\mathbf{C}$-Coegalisator $F_{\mathbf{C}}Y \rightrightarrows F_{\mathbf{C}}X \xrightarrow{h} A$ mit endlichen X, Y gibt. Tatsächlich zeigen wir sogar ohne Endlichkeits-Beschränkung an Y: Sei $(F_{\mathbf{C}}X \xrightarrow{h} A) \in \mathrm{Mor}\,\mathbf{C}$ mit endlichem X; wir zeigen, daß h kein $\mathbf{C}$-regulärer Epi ist.
1. Fall: Das Element $1 \in \mathbb{N} \subseteq A$ ist nicht in $h[F_{\mathbf{C}}X]$. Sei

$$F_{\mathbf{A}}\{(l_2 1, 1)\} \rightrightarrows (F_{\mathbf{C}}1/_{p0=0})_{\mathbf{C}} \xrightarrow{c} A$$

der nach (4.8) existierende $\mathbf{A}$-Coegalisator. Für jedes $x \in X$ wähle ein $x' \in (F_{\mathbf{C}}1/_{p0=0})_{\mathbf{C}}$ mit $c(x') = h(x)$, sodaß es keinen Term $\vec{t}$ gibt mit $\vec{t}(l_2(1)) = x'$ (das heißt $x' \notin \langle l_2(1)\rangle^{\mathbf{A}}_{F_{\mathbf{C}}1/_{p0=0}}$).
Dieses x' existiert: Sei y so, daß $c(y) = h(x)$ (existiert, weil c nach [AR 3.4(2)vi] surjektiv ist). Angenommen, es existiert ein Term $\vec{s}$ mit $\vec{s}(1) = y$. Sei n maximal, sodaß ein Term $\vec{u}$ mit $\vec{s} = \vec{u} \circ l_2^n$ existiert (n existiert, weil Terme aus finitären Operationen nur endlich lang sind). Nach Maximalität von n gibt es keinen Term $\vec{v}$ mit $\vec{u} = \vec{v} \circ l_2$. Sei

$x' := \vec{u}(1)$. Dann gibt es auch keinen Term $\vec{v}$ mit $x' := \vec{v}(l_2(1))$, denn für die von 1 in $\mathbf{A}$ erzeugte Unteralgebra von $(F_{\mathbf{C}}1/_{p0=0})_{\mathbf{C}}$ gilt

$$< 1 >_{(F_{\mathbf{C}}1/_{p0=0})_{\mathbf{C}}} \cong (F_{\mathbf{A}}1/_{pl_11=l_11})_{\mathbf{A}}.$$

Für die von $(p(l_1(1)), l_1(1))$ auf $F_{\mathbf{A}}1$ in $\mathbf{A}$ erzeugte Kongruenz $\sim$ gilt: $\sim \subseteq \langle (l_1(1), l_1(1)) \rangle_{(F_{\mathbf{A}}1)^2} \cup \Delta =: \Lambda$, (für die Diagonale Δ auf $F_{\mathbf{A}}1$), denn es gilt $\Delta \subseteq \Lambda$, $\{(y,x) : (x,y) \in \Lambda\} \subseteq \Lambda$, $\{(x,z) : (x,y) \in \Lambda \wedge (y,z) \in \Lambda\} \subseteq \Lambda$ und für jede Operation $\sigma \in \Sigma$: $\sigma^2[\Lambda] \subseteq \Lambda$. Damit folgt für jeden Term $\vec{t}$ aus $\vec{v} \circ l_2(1) = \vec{t}(1)$: $\vec{v} \circ l_2 = \vec{t}$.

Die gewählten x' definieren einen Morphismus $F_{\mathbf{C}}X \xrightarrow{h'} (F_{\mathbf{C}}1/_{p0=0})_{\mathbf{C}}$. Für jedes $y \in h'[F_{\mathbf{C}}X]$ gilt nach Wahl der x' und wegen $1 \notin h[F_{\mathbf{C}}X]$, daß es keinen Term $\vec{t}$ gibt mit $\vec{t}(l_2(1)) = y$. Für die Kongruenz $\asymp$ von c in $\mathbf{A}$ gilt

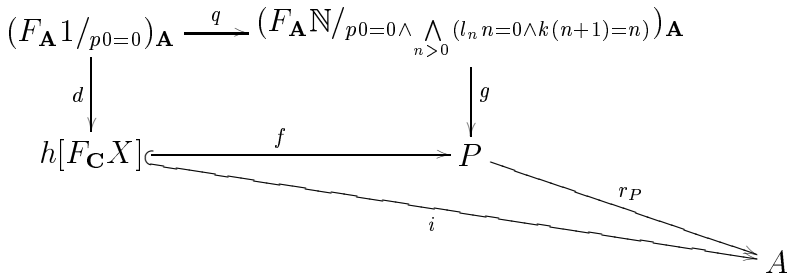
$$\asymp \subseteq \langle l_2(1) \rangle_{\prod} (F_{\mathbf{C}}1/_{p0=0})_{\mathbf{C}} \cup (F_{\mathbf{C}}1/_{p0=0})_{\mathbf{C}} \prod \langle l_2(1) \rangle \cup \Delta'$$

(für die Diagonale Δ' auf $(F_{\mathbf{C}}1/_{p0=0})_{\mathbf{C}}$, analog zu $\sim$). Somit ist $c|_{h'[F_{\mathbf{C}}X]}$ injektiv. Da aber nach Konstruktion $h = c \circ h'$ gilt, folgt:

$$\forall f, g \in \operatorname{Mor}\mathbf{C} : (h \circ f = h \circ g \Rightarrow h' \circ f = h' \circ g).$$

Weil jedoch h' nicht durch h faktorisiert (es gilt sogar $\hom_{\mathbf{C}}(A, (F_{\mathbf{C}}1/_{p0=0})_{\mathbf{C}}) = \emptyset$, weil $(F_{\mathbf{C}}1/_{p0=0})_{\mathbf{C}}$ keinen l_2-Fixpunkt besitzt), ist h nicht strikt, also nicht regulär.

2. Fall: Das Element $1 \in \mathbb{N} \subseteq A$ ist in $h[F_{\mathbf{C}}X]$. Angenommen, h sei regulärer Epimorphismus. Sei $n_0 := \max(\mathbb{N}_{>0} \cap h[F_{\mathbf{C}}X])$ (mit $\mathbb{N} \subseteq A$ wie in (4.7)). n_0 existiert, weil die betrachtete Menge nicht-leer (nach Voraussetzung) und endlich ist (sonst würde A vom endlichen $h[X]$ erzeugt (als Σ-Algebra), A ist aber offensichtlich nicht endlich erzeugt). Sei $h = (\, F_{\mathbf{C}}X \xrightarrow{\bar{h}} h[F_{\mathbf{C}}X] \xrightarrow{i} A \,)$ die (RegEpi, Mono)-Faktorisierung von h in $\mathbf{A}$ [AR 3.4(2)i,vi]. Nach 1.14 ist i ein Reflektionspfeil. Betrachten wir nun folgenden $\mathbf{A}$-Pushout P:



(wobei d definiert ist durch $d(0) := 0 = l_1 1 \in \mathbb{N} \cap h[F_{\mathbf{C}}X]$, das letztere nach Voraussetzung an das Element 1). Wegen $\mathbf{C} = (\{q\} \cup \{q_n : n \in \mathbb{N}_{>0}\})^{\perp}$ kann man P als ersten Schritt in der Orthogonal-Reflektions-Konstruktion von $R(h[F_{\mathbf{C}}X]) \cong A$ auffassen (s.2.5). Also haben wir einen Reflektionspfeil $P \xrightarrow{r_P} A$ mit $r_P \circ f = i$. Nun gilt $f(n_0) \notin g[\operatorname{cod} q]$ (sonst müßte nach 1.24 $n_0 \in d[(F_{\mathbf{A}}1/_{p0=0})_{\mathbf{A}}]$ sein). Insbesondere gilt für $n_0 \in \mathbb{N} \subseteq \operatorname{cod} q$ dann $g(n_0) \neq f(n_0)$.
Außerdem gilt für jeden Term $\vec{t}$: $f(n_0) \notin \vec{t} \circ k[P]$ (k die Algebra-Operation auf P): Da (f, g) überdeckend ist (**Alg Σ**-Colimiten sind für unäres Σ konkret, und in **Set** sind Epi-Senken überdeckend), reicht es, daß für jeden Term $\vec{t}$: $f(n_0) \notin \vec{t} \circ k[f[h[F_{\mathbf{C}}X]]]$ und $f(n_0) \notin \vec{t} \circ k[g[\operatorname{dom} q]]$ gilt.

- Für jeden Term $\vec{t}$ gilt $f(n_0) \notin \vec{t} \circ k[f[h[F_{\mathbf{C}}X]]]$, denn sonst hätten wir $f(n_0) \in \vec{t} \circ k[f[h[F_{\mathbf{C}}X]]]$ und damit:

  $$\begin{aligned} n_0 = r_P(f(n_0)) \in r_P[\vec{t} \circ k[f[h[F_{\mathbf{C}}X]]]] &= \vec{t} \circ k[r_P[f[h[F_{\mathbf{C}}X]]]] \\ &= \vec{t} \circ k[h[F_{\mathbf{C}}X]], \end{aligned}$$

  d.h. $n_0 = \vec{t} \circ k(y)$ für ein $y \in h[F_{\mathbf{C}}X]$. Dies ist aber wegen 1.22 nur möglich, wenn $y \in \mathbb{N}_{>n_0}$, im Widerspruch zur Minimalität von n_0.
- Für jeden Term $\vec{t}$ gilt $f(n_0) \notin \vec{t} \circ k[g[\operatorname{dom} q]]$: Sonst wäre insbesondere $f(n_0) \in g[\operatorname{dom} q]$ (g ist Homomorphismus und dom q ist Algebra), und nach 1.24 wäre dann $n_0 \in d[\operatorname{dom} q]$ (was nicht der Fall ist, da $d[\operatorname{dom} q] =< 0 >_{h[F_{\mathbf{C}}X]}$ und $n_0 \geq 1$).

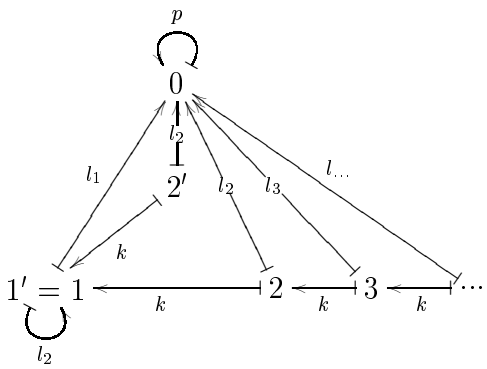
Damit folgt nun aber mit 2.6.α aus $g(n_0) \neq f(n_0)$ auch $r_P(g(n_0)) \neq r_P(f(n_0))$, d.h. wir bekommen zwei verschiedene Elemente $a \in A$ mit $l_{n_0}(a) = 0$ (da r_P, g und f Homomorphismen sind). Dies widerspricht aber der Injektivität von l_n auf A (siehe 1.22). \$

4.24 Beobachtung

(1) 4.23 und 4.8: $2 \overset{O}{\Rightarrow}$ b implizieren, daß die Unterkategorie $\mathbf{C}$ in 2.6 nicht $\aleph_0$-orthogonal ist.

(2) A ist (in Übereinstimmung mit 4.21) Retrakt von

$$\begin{aligned} B &:= (F_{\mathbf{C}}\{0, 1', 2'\}/_{(p0=0 \wedge l_2 1'=1' \wedge l_1 1'=l_2 2'=0 \wedge k2'=1')})_{\mathbf{C}} \\ &= (F_{\mathbf{C}}(\mathbb{N} \cup \{1', 2'\})/_{p0=0 \wedge \bigwedge\limits_{n>0} (l_n n=0 \wedge k(n+1)=n) \wedge l_2 2'=0 \wedge k2'=1' \wedge 1'=1)})_{\mathbf{A}}. \end{aligned}$$



Für den Retrakt r mit $r \circ s = id_A$ gilt $s(r(2')) = 2$ und $s(r(n)) = n$ (für $n \in \mathbb{N}$). Es gilt $1' = 1$ in B, da diese beiden Elemente während des Orthogonal-Reflektions-Prozesses identifiziert werden müssen, damit $\hom_{\mathbf{A}}(q_2, B)$ injektiv ist (notwendig für Orthogonalität).
Somit erhalten wir auch ein Beispiel dafür, daß ein Retrakt eines λ-präsentierten Objektes in einer lokal λ-präsentierbaren Kategorie im allgemeinen nicht einmal λ-erzeugt ist, und daß eine Komposition (in einer lokal präsentierbaren Kategorie) aus einem regulären Epimorphismus gefolgt von einem Retrakt im allgemeinen kein regulärer Epimorphismus ist.
In **Cat** ist ebenfalls eine Komposition aus einem regulären Epimorphismus gefolgt von einem Retrakt im allgemeinen kein regulärer Epimorphismus ([Jo96 exIII8i], [Schr98a]). In einer Kategorie mit Pullbacks ist jedoch eine Komposition aus einem Retrakt gefolgt vom einem regulären Epimorphismus ein regulärer Epimorphismus [Schr98b].
Ein weiteres Beispiel einer nicht-regulären Komposition aus regulärem Epimorphismus und Retrakt in einer λ-orthogonalen Unterkategorie eines λ-ären $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ ist das folgende: Sei $\lambda := \aleph_0$, $\mathbf{A}{:=}\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ mit $\Sigma := \{f, k\}$ (unäre Operationen) und $\mathbf{C} := \{m\}^{\perp}$ mit der Einbettung $(F_{\mathbf{A}}2/_{f0=0})_{\mathbf{A}} \xrightarrow{m} (F_{\mathbf{A}}3/_{f0=0 \wedge f2=1})_{\mathbf{A}}$ (das heißt, in Algebren mit einem f-Fixpunkt ist f bijektiv). Sei $B := (F_{\mathbf{C}}1/_{f0=0})_{\mathbf{C}}$, $A := (F_{\mathbf{C}}2/_{f0=0})_{\mathbf{C}}$ und $B \xrightarrow{r} A$ sei definiert durch $r(0) = 0$, $r(1) = 1$ und $r(2) = k(f^{-1}(1))$. Dann ist r Retrakt (mit Schnitt $0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1$), aber $F_{\mathbf{C}}1 \longrightarrow B \xrightarrow{r} A$ ist kein regulärer Epimorphismus (denn sein Kern wird von $\{(0, f(0))\}$ erzeugt, aber r ist kein Isomorphismus).

(3) Außerdem ist $F_{\mathbf{C}}1 \longrightarrow (F_{\mathbf{C}}1/_{p0=0})_{\mathbf{C}} \longrightarrow A$ nichtreguläre Komposition zweier regulärer Epis. Ein weiteres Beispiel gibt es bei 4.15(3): $F_{\mathbf{C}}1 \longrightarrow B \longrightarrow A$ ist nicht-reguläre Komposition regulärer Epimorphismen.

(4) Beachte jedoch, daß in lokal präsentierbare Kategorien die extremalen

Epimorphismen kompositionsabgeschlossen sind (siehe 2.20).

(5) A ist regulärer Quotient eines λ-präsentierten Objektes (siehe 4.23(4.8) und 4.23(4.9)), aber nicht λ-erzeugt (siehe den Beweis von 4.23) (vergleiche auch 4.15). In Anbetracht von 4.20 ist es allerdings nicht überraschend, daß wir im Beweis von 4.23 sogar das stärkere Statement ohne Beschränkung an Y zeigen konnten.

Anhang A

Übersicht

Auf den folgenden Seiten werden eine Übersicht über die in der Arbeit verwendete Hierarchie von Unterkategorien, und die Definitionen der Kleinheitsbedingungen gegeben.

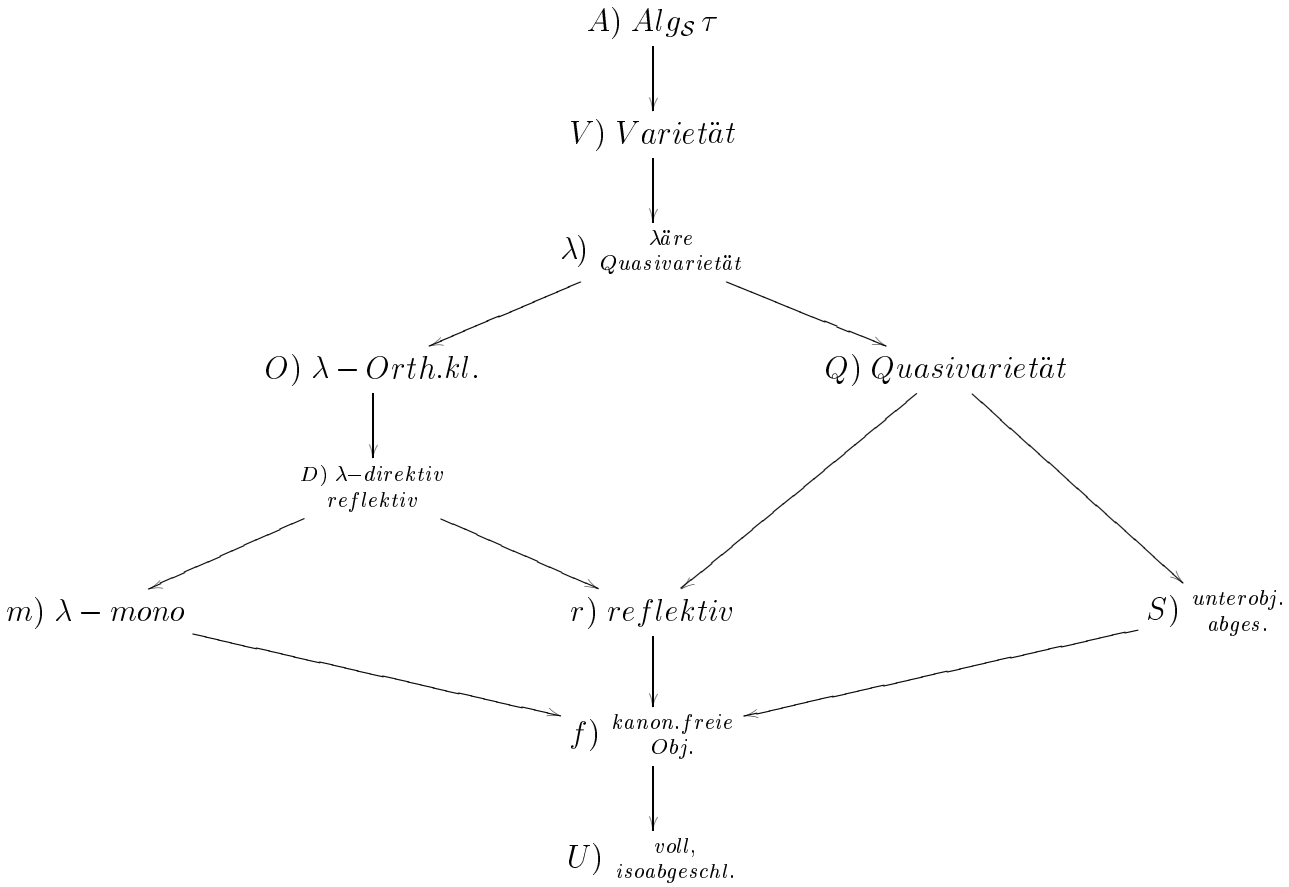
A.1 Hierarchie der Unterkategorien

λ-mono : Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten, abgeschlossen unter Colimiten von λ-gerichteten Monodiagrammen (vgl. 1.10(1))

kanon. freie Obj. : Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten

unterobj.abg. : Unterkategorie mit kanonischen freien Objekten, die abgeschlossen unter Unterobjekten ist

Es gilt folgende Hierarchie von Unterkategorien von $\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\,\tau$ für λ-äres τ:



A.2 Kleinheitsbedingungen

Ein Objekt A einer Kategorie **A** heißt

(1) λ **-präsentierbar**, wenn der zugehörige kovariante Hom-Funktor $\hom_{\mathbf{A}}(A, _) : \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$ λ-gerichtete Colimiten bewahrt [GU 6.1],

(2) λ **-klein**, wenn der zugehörige kovariante Hom-Funktor $\hom_{\mathbf{A}}(A, _) : \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$ λ-gerichtete Colimiten in Epi-Senken überführt [BH 150],

(3) λ **-erzeugbar**, wenn der zugehörige kovariante Hom-Funktor $\hom_{\mathbf{A}}(A, _) : \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$ λ-gerichtete Colimiten von Monodiagrammen bewahrt [GU 6.1],

(4) λ **-vereinigbar**, wenn der zugehörige kovariante Hom-Funktor $\hom_{\mathbf{A}}(A, _) : \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$ λ-gerichtete Vereinigungen bewahrt,

(5) **schwach λ-erzeugbar**, wenn der zugehörige kovariante Hom-Funktor $\hom_{\mathbf{A}}(A, _) : \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$ λ-gerichtete Colimiten mit Monotransformationen bewahrt,

(6) **schwach vom Typ** λ, wenn für jedes λ-gerichtete Diagramm $\mathbf{I} \xrightarrow{D} \mathbf{A}$ der kanonische Morphismus $\operatorname{col}_{\mathbf{Set}}(\hom_{\mathbf{A}}(A, _) \circ D) \to \hom_{\mathbf{A}}(A, \operatorname{col}_{\mathbf{A}} D)$ injektiv ist [Fa72 Déf. 1],

(7) **vom Typ** λ, wenn für jede aus Monomorphismen bestehende Colimes-Senke $(m_i : A_i \to A)_{i \in I}$ zu einem λ-gerichteten Diagramm eines der m_i ein Isomorphismus ist ([Pa 148]: "kompakt", [Nou]).

(a) $\operatorname{card} A < \lambda$

(b) λ**-präsentiert**: Es existieren $X, Y \in \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$ mit $\operatorname{card} X, \operatorname{card} Y < \lambda$, freie Objekte FX, FY und ein Coegalisator $FY \rightrightarrows FX \longrightarrow A$ [AR p143].

(c) λ**-erzeugt**: Es existieren $X \in \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$ mit $\operatorname{card} X < \lambda$, ein freies Objekt FX und ein regulärer Epimorphismus $FX \longrightarrow A$ (vgl. [AR p143]).

(d) λ**-kompakt**: Für jede extremal-epimorphe Senke $(A_i \longrightarrow A)_{i \in I}$ existiert $I' \subseteq I$ mit $\operatorname{card} I' < \lambda$, sodaß $(A_i \longrightarrow A)_{i \in I'}$ extremal-epimorph ist [P98].

(e) **extremal** λ**-erzeugt**: Es existiert $X \in \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$ mit $\operatorname{card} X < \lambda$ und ein extremal erzeugender Morphismus $(X \longrightarrow A) \in \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$ (vgl. [H71 p277]).

Anhang B

Wörterbuch

hier	[AHS]	[AR]	[GU]
strikter Mono	strict mono		regulärer Mono
starker Mono	strong mono		echter Mono
$\aleph_0$-Quasivarietät	finitary quasivariety	SP-class of finitary algebras	
λ-äre (Quasi-)Varietät		λ-ary (quasi-)variety	
Generator	seperating set	generator	Generator(enmenge)
für kovollständige Kategorien mit pullbacks stimmen überein:			
extremer Generator	extremal seperating set	strong generator	echter Generator
für kovollständige Kategorien stimmen überein:			
regulärer Generator			regulärer Generator

Anhang C

Abkürzungen der Kategorien

Ab	Abelsche Gruppen und Homomorphismen
Alg$_{\mathcal{S}}\,\tau$	$\mathcal{S}$-sortige τ-Algebren mit $\mathcal{S}$-sortigen τ-Homomorphismen für eine Sortenmenge $\mathcal{S}$ und eine (möglicherweise unendliche) $\mathcal{S}$-sortige Signaturmenge τ. Ein einelementiges $\mathcal{S}$ wird im allgemeinen in der Notation fortgelassen, und ein finitäres (bzw. unäres) τ durch ein Ω (bzw. Σ) ersetzt.
Cat	kleine Kategorien und Funktoren
fAb	freie Abelsche Gruppen und Homomorphismen
Gra	Graphen (d.h. Mengen mit einer binären Relation) und Homomorphismen
Grp	Gruppen und Homomorphismen
Lat	Verbände und Homomorphismen
Mon	Monoide und Homomorphismen
Ord	geordnete Klasse der Ordinalzahlen, aufgefaßt als Kategorie
pAb	profinite Abelsche Gruppen und Homomorphismen
PAlg τ	partielle Algebren und Homomorphismen [AR p162]
R-Mod	Links-R-Moduln und Homomorphismen
Rng	kommutative unitäre Ringe und unitäre Homomorphismen
Set$^{\mathcal{S}}$	$\mathcal{S}$-sortige Mengen mit $\mathcal{S}$-sortigen Abbildungen. Ein einelementiges $\mathcal{S}$ wird im allgemeinen in der Notation fortgelassen.

Sgr	Halbgruppen und Homomorphismen
TfAb	torsionsfreie abelsche Gruppen und Homomorphismen
Vec	$\mathbb{R}$-Vektorräume und lineare Abbildungen

Anhang D

Literaturverzeichnis

SLNM steht für Springer Lecture Notes in Mathematics, *LNCS* für Lecture Notes in Computer Science (ebenfalls von Springer).

D.1 Zitierte Arbeiten

A90 Adámek, J.: How many variables does a quasivariety need ?, *Alg. Univ.* 27 (1990) 44-48

AHS Adámek, J., H. Herrlich und G. E. Strecker: *Abstract and concrete categories*, Wiley, New York 1990.

AR Adámek, J. und J. Rosický: *Locally Presentable and Accessible Categories*, London Math. Soc. Lect. Note Ser. 189, Cambridge University Press, Cambridge 1994 (Korrekturen unter: ftp.iti.cs.tu-bs.de)

ArGrVer Artin, M., A. Grothendieck und J.L. Verdier: *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas* SLNM 269, Springer, Berlin 1972

BH Banaschewski, B. und H. Herrlich: Subcategories defined by implications, *Houston J. Math.* 2,2 (1976) 149-171.

BaW Barr, M. und C. Wells: *Toposes, Triples and Theories*, Springer, New York 1985 (Korrekturen unter triples.math.mcgill.ca)

Bre Breitsprecher, S.: Lokal endlich präsentierbare Grothendieck-Kategorien, *Mitt. Sem. Giessen* 85 (1970) 1-25

ChKei Chang, C.C. und H.J. Keisler: *Model Theory*, North-Holland, Amsterdam 1973

C81 Cohn, P.M.: *Universal Algebra*, 2^{nd} Edition, Reidel, Dordrecht 1981 (1^{st} Edition: 1965)

EvaHon Evans, T. und D.Y. Hong: The free modular lattice on four generators is not finitely presentable, *Alg. Univ.* 2 (1972) 284-285

Fa72 Fakir, S.: Catégories localement cohérentes et objets α-injectifs, *C.R. Acad. Sc. Paris* Sér. A, 274 (1972) 1392-1395.

Fa75 Fakir, S.: Objets algébriquement clos et injectifs dans les catégories localement présentables, *Bull. Soc. math. France* Mémoire 42 (1975)

GU Gabriel, P. und F. Ulmer: *Lokal präsentierbare Kategorien*, Springer Lecture Notes in Mathematics Vol. 221, Berlin/Heidelberg/New York 1971.

Ga Gardner, B. J.: How to make many-sorted algebras one-sorted, *Comment. Math. Univ. Carolinae* 30,4 (1989) 627-635.

Grä Grätzer, G.: *Universal Algebra*, 2^{nd} Edition, Springer, New York 1979 (1^{st} Edition 1968)

Hal Halmos, P.R.: *Naive Set Theory*, Van Nostrand Reinhold, New York 1960

H71 Herrlich, H.: A characterization of k-ary algebraic categories, *manuscripta math.* 4 (1971) 277-284.

H90 Herrlich, H.: Remarks on categories of algebras defined by a proper class of operations, *Quaest. Math.* 13 (1990) 385-393

H93 Herrlich, H.: On the failure of Birkhoff's theorem for locally small based equational categories of algebras, *Cahiers Topol. Géom. Diff.* 34-3 (1993) 185-192

H96 Herrlich, H.: *Algebra 1*, Vorlesung, Universität Bremen, Sommersemester 1996

Hof Hofmann, D., mündliche Mitteilung, Universität Bremen 1998

Hy Hyland, M.: *Model Theory*, Vorlesung, University of Cambridge, Lent Term 1997

J Jürjens, J.: On a problem of Gabriel and Ulmer, to be submitted to *J. Pure Appl. Alg*

Jo Johnstone, P.T.: *Stone Spaces*, Cambridge University Press, Cambridge 1982

Jo87 Johnstone, P.T.: *Notes on logic and set theory*, Cambridge University Press, Cambridge 1987

Jo96 Johnstone, P.T.: *Category Theory*, Vorlesung, University of Cambridge, Michaelmas Term 1996

La Lafont, Y.: Une nouvelle condition de finitude pour les monoïdes présentés par des systèmes de réécriture complets, in [Age] 97-102

Lan Lang, B.: *Universelle Konstruktionen in Kategorien von Verbänden*, Diplomarbeit, Universität Bremen 1998

ML MacLane, S.: *Categories for the Working Mathematician*, Springer, New York/Berlin/Heidelberg 1971

MaPar Makkai, M. und R. Paré: Accessible Categories: The Foundation of Categorical Model Theory, *Contemp. Math.* 104 (1989)

Mak Makowski, J.A.: Why Horn Formulas Matter in Computer Science: Initial Structures and Generic Examples, *J.C.S.S.* 34 (1987) 266-292

M71 Mal'cev, A.I.: *The metamathematics of algebraic systems*, North-Holland, Amsterdam 1971

Man Manes, E.G.: *Algebraic theories*, Springer, Berlin/Heidelberg/New York 1976

Mat Matthiessen, G.: Regular and strongly finitary structures over strongly algebroidal categories, *Can. J. Math.* 30,2 (1978) 250-261.

Mey Meyberg, K.: *Algebra*, Teil 1, 2. Aufl., Hanser München 1980 (1. Aufl. 1974)

Neu69 Neumann, W.D.: On Cardinalities of Free Algebras and Ranks of Operations, *Arch. Math* 20 (1969) 132-133

Nou Nouzé, Y.: Catégories localement de type fini et catégories localement nœthériennes, *C.R. Acad. Sci.* 257 Sér. 1 (1963) 823-824

Pa Pareigis, B.: *Kategorien und Funktoren* Teubner, Stuttgart 1969 (englische Übersetzung: Categories and Functors, Academic Press, New York 1970)

P Porst, H.-E.: *Universelle Algebra*, Vorlesungs-Manuskript, Universität Bremen

P98 Porst, H.-E.: *Equivalence of Varieties*, Preprint, Universität Bremen 1998

Riv Rival I.: Order, Ice and Surfaces, in [BakWil] 211-218

Rob Robinson, D.J.S.: *A Course in the Theory of Groups*, Springer, New York 1996

Rot Rothmaler, P.: *Einführung in die Modelltheorie*, Spektrum, Heidelberg 1995

Schr98a Schröder, L.: *Regularly Epimorphic Functors - a Counterexample*, Notiz, Universität Bremen 1998

Schr98b Schröder, L.: *A Remark on Regular Epimorphisms*, Notiz, Universität Bremen 1998

Sk Skornjakow, L.A.: *Elemente der Verbandstheorie*, Akademie-Verlag, Berlin 1973

Sla Slavík, V.: Finiteness of finitely presented Lattices, in: [BakWil], 219-227

vDDoSw van Dalen, D., H.C. Doets und H. de Swart: *Sets: Naive, Axiomatic and Applied*, Pergamon Press, Oxford 1978

Vol79 Volger, H.: Preservation Theorems for Limits of Structures and Global Sections of Sheaves of Structures, *Math. Z.* 166 (1979) 27-53

Vol Volger, H.: Model Theory of deductive databases, CSL '87 1^{st} Workshop on Comp. Sci. Logic *LNCS* 329 (1988) 322-334

D.2 Sammelwerke

Age Ageron, P.: *Catégories, Algébres, Esquisses et Néeo-Esquisses*, 27.-30.9.1994

BakWil Baker, K.A. und R. Wille (eds.): *Lattice Theory and its Applications*, Heldermann, Lemgo 1995

CsaFriSct Csákány, B., E. Fried und E.T. Schmidt (eds.): Universal Algebra (Proc. Coll. Univ. Alg. Esztergom 1977) *Coll. Math. Soc. J. Bolyai* 29, North-Holland, Amsterdam 1982

CsaSdt Csákány, B. und J. Schmidt (eds.): Contributions to Universal algebra (Proc. Coll. Univ. Alg. Esztergom 1975) *Coll. Math. Soc. J. Bolyai* 17, North-Holland, Amsterdam 1977

DenVog Denecke, K. und H.-J. Vogel (eds.): *Category Theory and Applications* (Proc. 18th Conf. Univ. Alg. Nahmitz 1988), Pädagogische Hochschule Potsdam 1989

EHarMLRöh Eilenberg, S., D.K. Harrison, S. MacLane und H. Röhrl (eds.): *Proceedings of the Conference on Categorical Algebra, La Jolla 1965*, Springer, Berlin 1966

HHoP Herrlich, H., R.-E. Hoffmann und H.-E. Porst: Workshop on Category Theory, *Math. Arbeitsp. Univ. Bremen* 28 (1987)

HP Herrlich, H. und H.-E. Porst; *Category Theory at work* (Proc. workshop Bremen 1990), Heldermann, Berlin 1991

HuhSchm Huhn, A.P. und E.T. Schmidt (eds.): Contributions to lattice theory (Proc. Conf. Szeged), *Coll. Math. Soc. J. Bolyai* 33, North-Holland, Amsterdam 1983

LMauWra Lawvere, F.W., C. Maurer und G. Wraith: Model Theory and topoi, *SLNM* 445 (1975)

P97 Porst, H.-E. (ed.): Categorical Methods in Algebra and Topology, *Math. Arbeitsp. Univ. Bremen* 48 (1997)

SchmiSchütThi Schmidt, H.A., K. Schütte und H.J. Thiele (eds.): *Contributions to mathematical logic* North-Holland, Amsterdam 1968

See Seely, R.: Category theory 1991, *Can. Math. Soc. Conf. Proc.* 13 (1992)

D.3 Weitere Literaturhinweise

Lokal präsentierbare Kategorien

Weiteres über algebroidale (solche, die λ-gerichtete Colimiten besitzen und in denen jedes Objekt λ-gerichteter Colimes aus λ-kleinen ist) bzw. lokal präsentierbare Kategorien findet man außer in [BH] bzw. [GU] und [AR] in:

additive Kategorien: [Sch ch17.4], [Bre], [Cra94a], [Cra94b], [Kra].

lokal kohärente Kategorien: [Fa72], [Fa75 ch4,9]

lokal noethersche Kategorien: [Nou], [G], [Pa ch4.10], [Fa75 ch4]

Gabriel-Ulmer Dualität: [MaPi], [GoPow], [AP]

allgemein: [FK], [Ba], [P72 chI5], [MaPi], [AR89], [DSt], [DSt90], [TrAR], [RTrA], [Bo2 ch5], [R94], [RABo]

lokal multi- (bzw. poly-)präsentierbare Kategorien: [Di80], [AR96a], [Heb]

accessible categories: [MaPar], [AR95], [AR96], [HuPel], [Heb98]

Kategorien von Algebren

- Weitere Charakterisierungen von Kategorien von Algebren findet man, außer in [H71], [HRin], [BH], [AHS ch16,20,23,24] und [AR]:

  Varietäten und (λ-äre) Quasivarietäten: [L], [I], [Drb], [Li], [Fe68b], [T], [Die], [Fe69], [Sha], [Sha70], [Hat], [M71 ch4,18,31,34], [D] [P72 chI2,3], [Sel], [M73 chV,VI], [ML chVI], [GU ch10,11], [L], [Pa ch3] [Sch ch18], [HS ch38], [Joh], [Ta], [Di], [Man ch1,3], [Bur], [D77], [R], [Smi], [R81a], [BoD], [Re], [BoD80], [Grä app4], [DaWer], [Ri], [BaW ch3,9], [Den], [LüdDen], [C81 chIV,VI,VIII], [P92], [BlWr] (zum Beispiel 3.24, 3.47), [Bo2 ch3,4], [A96], [P], [P96], [AP].

  spezielle (Quasi-)Varietäten: [Edg], [Möb], [Ri91], [BaPe], [APe]

  universelle Horn Theorien: [ChMor], [Ke], [ChKei ch6.2,6.3], [M73 ch8.4], [Dix], [Grä ch7], [R94], [AP].

  orthogonale Unterkategorien: [FK], [K], [RTh], [Bo1 ch5.4], [Sou95a], [Sou95b]

  weitere Charakterisierungen: [I], [Fel68a], [Jez], [Neu70] [M71 ch9,10], [Bac], [BNel] [M73 ch7.2], [ESchü], [Mat], [AnNe77], [NeSai], [AnNe79], [AnNe79a], [Poi], [PulTr], [R81b], [Hi], [AVol], [Ba91], [Jar], [Ba94], [Rot ch10.3], [McK], [Lei], [Lei98]

  Unterkategorien von $\mathbf{PAlg}\,\tau$: [Ker], [Joh], [Ne], [AnNe83], [Bu], [Rei ch2.5], [Ngu]

  essentially equational categories: [K82], [AHR], [BeMur], [AR96a],

- Eine hinreichende Bedingung dafür, daß Colimes-Senken zu gerichteten Mono-Diagrammen aus Monomorphismen bestehen, findet man in [BlWr 3.33], ein Beispiel einer (notwendigerweise nicht-finitären) Varietät, in der das nicht der Fall ist, in [BlWr 5.3].

Kleine Objekte

- Weiteres über Kleinheitsbedingungen findet man außer in [H71], [BH], [GU ch6] und [AR ch1B,1E,3A] in:

λ-präsentiert: [M73 ch11.2]

λ-erzeugt: [Bir chVIII.3]

abstractly finite: [L], [I], [Sch ch17.4], [HS 32G], [BlWr ch2].

bounded, having rank: [FK §3]

irreducible: [Jo96 exI6]

Kuratowski finite: [Vic]

countably based: [A92 p6]

kompakter Kern: [BlWr 4.5].

Noethersch: [Bir chVIII]

λ-injektiv, λ-kohärent: [FaHa], [Fa72], [Fa75 ch4]

(schwach) vom Typ λ [FaHa], [Fa75 ch1]

weitere Bedingungen: [Lyn], [Lyn54], [OatPo], [Mur], [T p278] [Au], [Pa ch4.10,4.11], [Sch ch17.5], [Bre p3-13], [P72 chI4], [F73], [FaHa], [ATr p312f,280f], [Grä §62,67,68], [Jo chVI.2], [Mat], [DaWer p197f], [LüdDen p67], [Kra18,21], [La], [P97a], [Di98]

Kleinheitsbedingungen in topologischen Kategorien: [ARe ch2]

- Anwendungen von Kleinheitsbedingungen in **Grp** gibt es in [M71 ch2] und [Rot ch6.5], in der Kategorie der Modelle in [M71 ch3] und [ChKei ex2.1.12], in **Ab** (u.a.) in [Rot ch6.3], in **Lat** in [Fre] und [Sla], und in **Mon** sowie für Termersetzungssysteme in [La] und [Wan].

A92 Adámek, J.: *Data Types in Algebraically ω-Complete Categories*, Tech. Ber. Fak. Math. Inf. Univ. Passau MIP-9201, 1992

A94 Adámek, J.: Existence and nonexistence of regular generators, *Canad. Math. Bull.* 37,1 (1994) 3-7.

A96 Adámek, J.: How to Sketch Quasivarieties, *J. Alg.* 185 (1996) 643-659

AHR Adámek, J., H. Herrlich und J. Rosický: Essentially equational categories, *Cahiers Topol. Géom. Diff.* 29-3 (1988) 175-192

AP Adámek, J. und H.-E. Porst: Algebraic Theories of Quasivarieties, Preprint 1997 (erscheint in *J. Alg.*)

APe Adámek, J. und M.-C. Pedicchio: A remark on topological spaces, grids and topological systems, *Cahiers Topol. Géom. Diff.* 38-3 (1997) 217ff

AR89 Adámek, J. und J. Rosický: Reflections in locally presentable categories, *Arch. Math. (Brno)* 25,1-2 (1989) 89-94

AR95 Adámek, J. und J. Rosický: Finitary sketches and finitely accessible categories, *Math. Struct. Comp. Sci.* 5 (1995) 315-322

AR96 Adámek, J. und J. Rosický: A remark on accessible and axiomatizable categories, *Comm. Math. Univ. Carol.* 37,2 (1996) 411-414

AR96a Adámek, J. und J. Rosický: An algebraic description of locally multipresentable categories, *Th. Appl. Cat.* 2,4 (1996) 40-54 (erhältlich über http://www.tac.mta.ca/tac/)

ATr Adámek, J. und V. Trnková: *Automata and Algebras in Categories*, Kluwer, Dordrecht 1990

AVol Adámek, J. und H. Volger: *On Locally Reflective Categories of Structures*, Tech. Ber. Fak. Math. Inf. Univ. Passau MIP-9202, 1992

AnNe77 Andréka, H. und I. Németi: A general axiomatizability theorem formulated in terms of cone-injective subcategories, in [CsaFriSct] 13-36

AnNe79 Andréka, H. und I. Németi: Formulas and ultraproducts in categories, *Beitr. Alg. Géom.* 8 (1979) 133-153

AnNe79a Andréka, H. und I. Németi: Injectivity in categories to represent all first order formulas I, *Demonst. Math.* 12,3 (1979) 717ff

AnNe83 Andréka, H. und I. Németi: *Generalization of the concept of variety and quasivariety to partial algebras through category theory* Diss. Math. (Rozpr. Mat.) 104 (1983)

Au Auslander, M.: Coherent Functors, in [EHarMLRöh] 189-231

Bac Bacsich, P.D.: Injectivity in model theory, *Colloq. Math.* 25,2 (1972) 165-176

BNel Banaschewski, B. und E. Nelson: Equational compactness in equational classes of algebras, *Alg. Univ.* 2 (1972) 152ff

Ba Barr, M.: Exact Categories, *SLNM* 236 (1971) 1-120

Ba91 Barr, M.: HSP type theorems in the category of posets, *LNCS* 598 (1991) 221ff

Ba94 Barr, M.: Functorial semantics and HSP type theorems, *Alg. univ.* 31 (1994) 223-251

BaPe Barr, M. und M.-C. Pedicchio: $\mathbf{Top}^{op}$ is a quasi-variety, *Cahiers Topol. Géom. Diff.* 36 (1995) 3-10 (Review: MR 96c:08013)

BeMur Bentley, H.L. und N. Murthy: Essentially algebraic categories of partial algebras, *Quaest. Math.* 13 (1990) 361-384

Bir Birkhoff, G.: *Lattice theory*, 3^{rd} (new) Edition, Amer. Math. Soc. Coll. Pub. 25, Providence 1967 (1^{st} Edition: 1940)

BlWr Bloom, S.L. und J.B. Wright: Finitary quasi-varieties, *J. Pure Appl. Alg.* 25 (1982) 121-154

Bo Borceux, F.: *Handbook of Categorical Algebra*, vol. 1-3, Cambridge University Press, Cambridge 1994

BoD Borceux, F. und B.J. Day: On characterisation of finitary algebraic categories, *Bull. Austral. Math. Soc.* 18 (1978) 125-135

BoD80 Borceux, F. und B.J. Day: Universal algebra in a closed category, *J. Pure Appl. Alg.* 16 (1980) 133ff

Bu Burmeister, P.: *Model-theoretic approach to partial algebras*, Akademie Verlag, Berlin 1986

Bur Burris, S.: Remarks on reducts of varieties, in [CsaFriSct] 161-168

ChMor Chang, C.C. und A.C. Morel: On closure under direct product, *J. Symb. Logic* 23,2 (1958) 149-154

Cra94a Crawley-Boevey, W.: Additive functions on locally finitely presented Grothendieck categories, *Commun. Alg.* 22(5) (1994) 1629-1639

Cra94b Crawley-Boevey, W.: Locally finitely presented additive categories, *Commun. Alg.* 22(5) (1994) 1641-1674

DaWer Davey, B.A. und H. Werner: Dualities and equivalences for varieties of algebras, in: [HuhSchm] 101-276

D Day, A.: Injectivity in equational classes of algebras, *Can. J. Math.* 24,2 (1972) 209-220

D77 Day, A.: Varieties of a closed category, *Bull. Austral. Math. Soc.* 16 (1977) 131-145

DSt Day, A. und R. Street: Localisations of locally presentable categories, *J. Pure Appl. Alg.* 58 (1989) 227-233

DSt90 Day, A. und R. Street: Localisations of locally presentable categories II, *J. Pure Appl. Alg.* 63 (1990) 225-229

Den Denecke, K.: *Quasivarieties generated by single preprimal algebras*, in [Den-Vog] 9-14

Die Diener, K.-H.: A remark on equational classes generated by very small free algebras, *Arch. Math.* 20 (1969) 491-494

Di Diers, Y.: Variétés d'une catégorie, *Ann. Soc. Sci. Brux.* T.90 II (1976) 159-172

Di80 Diers, Y.: Catégories Localement Multiprésentables, *Arch. Math.* 34 (1980) 344ff

Di98 Diers, Y.: Finitely coordinated and finitely copresentable affine algebraic sets, Preprint 1998

Dix Dixon, P.G.: Classes of algebraic systems defined by universal Horn sentences, *Alg. Univ.* 7 (1977) 315-339

Drb Drbohlav, K.: A categorical generalization of a theorem of G. Birkhoff an primitive classes of universal algebras, *Comm. Math. Univ. Carol.* 6,1 (1965) 21ff

Edg Edgar, G.A.: The class of topological spaces is equationally definable, *Alg. Univ.* 3 (1973) 139ff

ESchü Eilenberg, S. und M.P. Schützenberger: On Pseudovarieties, *Advanc. Math.* 19 (1976) 413-418

Fa73 Fakir, S.: Monomorphismes et objets algébriquement et existellements clos dans les catégories localement présentables. Applications aux monoïdes, catégories et groupoïdes. *C.R. Acad. Sci. Paris* t.276 Sér. A (1973) 723-726

FaHa Fakir, S. und L. Haddad: Objets cohérents et ultraproduits dans les catégories, *J. Algebra* 21 (1972) 410-421.

Fe68a Felscher, W.: Equational maps, in [SchmiSchütThi] 121-162

Fe68b Felscher, W.: Kennzeichnung von primitiven und quasiprimitiven Kategorien von Algebren, *Arch. Math.* 19 (1968) 390-397

Fe69 Felscher, W.: Birkhoffsche und kategorische Algebra, *Math. Ann.* 180 (1969) 1-25

Fre Freese, R.: Finitely presented lattices: canonical forms and the covering relation, *Trans. AMS* 312,1 (1989) 841ff

FK Freyd, P. und M. Kelly: Categories of continuous functors I, *J. Pure Appl. Alg.* 2 (1972) 169-191; Erratum, *J. Pure Appl. Alg.* 4 (1974) 121

G Gabriel, P.: Des Catégories abéliennes, *Bull. Soc. math. France* 90 (1962) 323-448

GoPow Gordon, R. und A.J. Power: Gabriel-Ulmer duality for categories enriched in bicategories, in [Age] 63ff

Hat Hatcher W.S.: Quasiprimitive Subcategories, *Math. Ann.* 190 (1970) 93-96

Heb Hébert, M.: Syntactic characterizations of closure under pullbacks and of locally polypresentable categories, *Ann. Pure Appl. Logic* 84,1 (1997) 73-95

Heb98 Hébert, M.: Purity and injectivity in accessible categories, *J.Pure Appl. Alg.* 129 (1998) 143-147

HRin Herrlich, H. und C.M. Ringel: Identities in categories, *Canad. Math. Bull.* 15(2) (1972) 297-299

HS Herrlich, H. und G. Strecker: *Category Theory*, Heldermann, 2. Auflage, Berlin 1979 (1. Auflage: Allyn and Bacon, Boston 1971)

Hi Higgins, P.M.: An algebraic proof that pseudovarieties are defined by pseudoidentities, *Alg. Univ.* 27 (1990) 597-599

HuPel Hu, H. und J.W. Pelletier: On regular monomorphisms in weakly locally presentable categories, *J. Pure Appl. Alg.* 166,1-3 (1997) 163-168

I Isbell, J.R.: Subobjects, adequacy, completeness and categories of algebras, *Rozpr. Mat.* 36 (1964)

Jar Jarzembski, G.: Elementary reflections of concrete categories of mixed structures, in [See] 285-298

Jez Jeřek, J.: On categories of structures and classes of algebras, *Diss. Math. (Rozpr. Mat.)* 75 (1970)

Joh John, R.: *Gültigkeitsbegriffe für Gleichungen in partiellen Algebren*, Dissertation TU Darmstadt 1975 (inkl. A note on implicational subcategories, die auch in [CsaFriSct] 213-222 zu finden ist)

Kar Karazeris, P.: Compact topologies on locally presentable categories, *Cahiers Topol. Géom. Diff.* 38-3 (1997) 227-239

Ke Keane, O.: Abstract Horn Theories, in [LMauWra] 15-50

K Kelly, G.M.: A unified treatment of transfinite constructions for free algebras, free monoids, colimits, associated sheaves, and so on, *Bull. Austral. Math. Soc.* 22 (1980) 1-83

K82 Kelly, G.M.: On the essentially-algebraic theory generated by a sketch, *Bull. Austral. Math. Soc.* 26 (1982) 45-56

Ker Kerkhoff, R.: Gleichungsdefinierbare Klassen partieller Algebren, *Math. Ann.* 185 (1970) 112-133

Kra Krause, H.: *Functors on locally finitely presented additive categories* Preprint 95-019, SFB Diskrete Strukturen in der Mathematik, Universität Bielefeld 1995

L Lawvere, F.W.: Functorial semantics of algebraic theories, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 50 (1963) 869-872

Lei Leinster, T.: e-mail über strongly regular theories, categories@mta.ca 6.12.1997

Lei98 Leinster, T.: e-mail über pullback of monadic functors, categories@mta.ca 14.1.1998, und Antworten von S. Lack (15.1.98), J. Jürjens (19.1.98) und M. Barr (20.1.98)

Li Linton, F.E.J.: Some Aspects of Equational Categories, in [EHarMLRöh] 84-94

LüdDen Lüders, O. und K. Denecke: Varieties generated by two-element near-unanimity algebras, their dualities, and their equivalences, in [DenVog] 65-81

Lyn Lyndon, R.C.: Identities in two-valued calculi, *Trans. AMS* 71 (1951) 457-465

Lyn54 Lyndon, R.C.: Identities in finite algebras, *Proc. AMS* 5 (1954) 8-9

MaPi Makkai, M. und A.M. Pitts: Some results on locally finitely presentable categories, *Trans. AMS* 299,2 (1987) 473ff

M73 Mal'cev, A.I.: *Algebraic Systems*, Springer, Berlin/Heidelberg/New York 1973

McK McKenzie, R.: An algebraic version of categorical equivalence for varieties and more general algebraic categories, *Lect. Notes Pure Appl. Math.* 180 (1996) 211-243

Möb Möbus, A.: Equational Theory of Continuous Lattices, in [HHoP] 82-87

Mur Murskiĭ, V.L.: The existence in three-valued logic of a closed class with finite basis, not having a finite complete system of identities, *Soviet math.* 6,2 (1965) 1020-1024

Ne Németi, I.: From hereditary classes to varieties in abstract model theory and partial algebra, *Beitr. Alg. Géom.* 7 (1978) 69-78

NeSai Németi, I. und I. Sain: Cone-implicational subcategories and some Birkhoff-type theorems, in [CsaFriSct] 535-578

Neu70 Neumann, W.D.: Representing varieties of algebras by algebras, *J. Austral. Math. Soc.* 11 (1970) 1-8

Ngu Nguyêñ, C.T.: *Die Kategorie PAlg(τ) der partiellen Algebren eines gegebenen Typs τ und einige ihrer Unterkategorien*, Dissertation, Universität Bremen 1995, (Auszug: Multi-$\mathcal{E}$-Reflective and Bireflective Subcategories of Partial Algebras, Appl. Cat. Struct. 5 (1997) 143-154)

OatPo Oates, S. und M.B. Powell: Identical Relations in Finite Groups, *J. Alg.* 1 (1964) 11-39

Poi Poigné, A.: *Zur Konstruktion freier gleichungsdefinierter Algebren in S-monoidalen Kategorien*, Dissertation, Universität Dortmund 1979

P72 Porst, H.-E.: *Algebraische Kategorien und Dualitäten*, Dissertation, Universität Bremen 1972

P92 Porst, H.-E.: *Kategorielle Algebra*, Vorlesungs-Manuskript, Universität Bremen SoSe 1992

P96 Porst, H.-E.: *Lawvere-Theorien*, Vorlesungs-Manuskript, Universität Bremen WiSe 1996/97

P97a Porst, H.-E.: Minimal Generators in Varieties, in [P97] 347-352

PulTr Pultr, A. und V. Trnková: *Combinatorial, algebraic and topological representations of groups, semigroups and categories*, North-Holland, Amsterdam 1980

Rei Reichel, H.: *Initial Computability, Algebraic Specifications, and Partial Algebras*, Oxford University Press, Oxford 1987

Re Reiterman, J.: One More Categorical Model of Universal Algebra, *Math. Z.* 161 (1978) 137-146

Ri Richter, G.: *Kategorielle Algebra*, Akademie-Verlag, Berlin 1979

Ri91 Richter, G.: Axiomatizing the Category of Compact Hausdorff Spaces, in [HP] 199-215

R Rosický, J.: On algebraic categories, in [CsaFriSct] 663-690

R81a Rosický, J.: Equational categories *Cahiers Top. Géom. Diff.* 22-1 (1981) 85ff

R81b Rosický, J.: Concrete categories and infinitary languages, *J. Pure Appl. Alg.* 22 (1981) 309-339

R94 Rosický, J.: Models of Horn theories revisited, *J. Pure Appl. Alg.* 92 (1994) 185-190

RABo Rosický, J., J. Adámek und F. Borceux: More on Injectivity in Locally Presentable Categories, in [P97] 397-405

RTh Rosický, J. und W. Tholen: Orthogonal and prereflective subcategories, *Cahiers Topol. Géom. Diff.* 29-3 (1988) 203ff

RTrA Rosický, J., V. Trnková und J. Adámek: Unexpected properties of locally presentable categories, *Alg. Univ.* 27 (1990) 153-170

Sch Schubert, H.: *Kategorien*, Springer, Berlin 1970

Sel Selman, A.: Completeness of calculi for axiomatically defined classes of algebras, *Alg. Univ.* 2 (1972) 20ff

Sha Shafaat, A.: On implicationally defined classes of algebras, *J. London Math. Soc.* 44 (1969) 137-140

Sha70 Shafaat, A.: A note on quasiprimitive classes of algebras, *J. London Math. Soc.* Ser.2 2 (1970) 489-492

Smi Smirnov, D.M.: Varieties and quasivarieties of algebras, in [CsaFriSct] 745-751

Sou95a Sousa, L.: Solid Hulls of Concrete Categories, *Appl. Cat. Struct.* 3 (1995) 105-118

Sou95b Sousa, L.: Orthogonality and closure operators, *Cahiers Topol. Géom. Diff.* 36-4 (1995) 323-343

T Tarski, A.: Equational logic and equational theories of algebras, in [SchmiSchütThi], 275-288

Ta Taylor, W.: Equational logic, in [CsaSdt] 465-502

TrAR Trnková, V., J. Adámek und J. Rosický: Topological reflections revisited, *Proc. AMS* 108,3 (1990) 605ff

Vic Vickers, S.: Topical categories of domains, erscheint in *Math. Struct. Comp. Sci.*

Wan Wang, J.: Finite Complete Rewriting Systems and Finite Derivation Type for Small Extensions of Monoids, *J. Alg.* 204 (1998) 493-503

Anhang E

Zeichenverzeichnis

$\forall_n$ Seite 7
$\exists_n$ Seite 7
$\mathrm{card}\, X$ Seite 11
λ Seite 11
0 Seite 11
1 Seite 11
2 Seite 11
$\aleph_\alpha$ Seite 11
$\circ$ Seite 12
$A \in \mathbf{A}$ Seite 12
$(A \xrightarrow{f} B) \in \mathbf{A}$ Seite 12
$\mathbf{A}-$ Seite 12
$|\text{-}|$ Seite 13
$F_{\mathbf{A}}$ Seite 13
$< S >_A$ Seite 13
const_a Seite 13
R Seite 13
$r_A : A \to RA$ Seite 13
$(A/_{\bigwedge_{i\in I} s_i=t_i})_{\mathbf{A}}$ Seite 14
$\mathbf{Alg}_{\mathcal{S}}\, \tau$ Seite 16
1_s Seite 17
$\mathbf{Set}^{\mathcal{S}} \xrightarrow{U_s} \mathbf{Set}$ Seite 17
$1 \xmapsto{l} 0$ Seite 18
pAb Seite 23
const_A Seite 34
TfAb Seite 38
pAb Seite 39
Q/Z Seite 39
$\mathbf{Z}[X]$ Seite 39
Rng Seite 39
fAb Seite 40
Gra Seite 43
pAb Seite 44
pAb Seite 47
Cat Seite 48
1_s Seite 50
U_s Seite 51
$Id_{\mathbf{N}}$ Seite 54
Rng Seite 63
Q Seite 63
card Seite 66
Ab Seite 68
Z Seite 68
TfAb Seite 69
Ab Seite 80
Vec Seite 80
Grp Seite 80
Sgr Seite 80
Lat Seite 80
TfAb Seite 80
1_s Seite 84
Rng Seite 90
R – Mod Seite 90
Lat Seite 90
Mon Seite 90
Grp Seite 90

Ab Seite 90
Cat Seite 103
card Seite 107
Grp Seite 119
Ab Seite 119
Lat Seite 119
Mon Seite 119

Index

(ExtrEpi, MonoQuelle)-Kategorie, 34
(ExtrEpi, Monomorphismus)-Kategorie, 49
überdeckend, 11
überdeckende Senke, 48
λ-direktiv, 13
λ-erzeugbar, 54, 107
λ-erzeugbarem Generator, 32
λ-erzeugt, 66, 107
λ-gerichtete Vereinigung, 13
λ-klein, 53, 107
λ-kompakt, 67, 107
λ-orthogonal, 82, 87
λ-präsentierbar, 53, 107
λ-präsentiert, 66, 107
λ-vereinigbar, 54, 107
$\mathcal{S}$-Konstrukt, 13
λ-Orthogonalitätsklasse, 38
λ-äre Quasivarietät, 38, 118
λ-direktiv, 38
λ-gerichtetes Monodiagramm, 44
λ-kleiner Colimes, 89
λ-kleines Diagramm, 54
λ-präsentierbarer Generator, 15

abgeschlossen unter Colimiten, 12
abzählbar, 11
algebroidal, 117

Cantor, 72

dicht, 43

epimorph λ-erzeugt, 96
extremal λ-erzeugt, 67, 107
extremale Epi=Senke, 48
extremaler Epimorphismus, 104

Fatfree Sandwich, 40

Gleichung, 36

Homologie-Gruppe, 8
Horn Theorie, 8, 118

Implikation, 36

kanonische freie Objekte, 14
kompakt, 54
Komposition, 12

lokal λ-erzeugbar, 33
lokal präsentierbar, 117
lokales Theorem, 8

Monodiagramm, 13

orthogonal, 118

Polynomring, 90

Quasivarietät, 8, 36, 38, 87, 118

RegEpi-Reflektoren, 57
regulärer Epimorphismus, 88, 89, 103, 104
regulärer Epimorphismus, 86
regulärer Generator, 15, 91
relativ frei, 19
Retrakt, 89, 103

schwach λ-erzeugbar, 54, 107
schwach regulärer Generator, 15, 40
schwach vom Typ λ, 54, 107
schwach vom Typ λ, 119
starker Epimorphismus, 47, 55, 77, 79, 89
strikter Epimorphismus, 85

Term, 16
Termersetzungssystem, 8, 119

Unterkategorie, 12

Varietät, 36, 38, 81, 118
Vereinigung, 13
vom Typ λ, 54, 107, 119
Vopěnka's Prinzip, 36, 43

Yoneda-Einbettung, 33